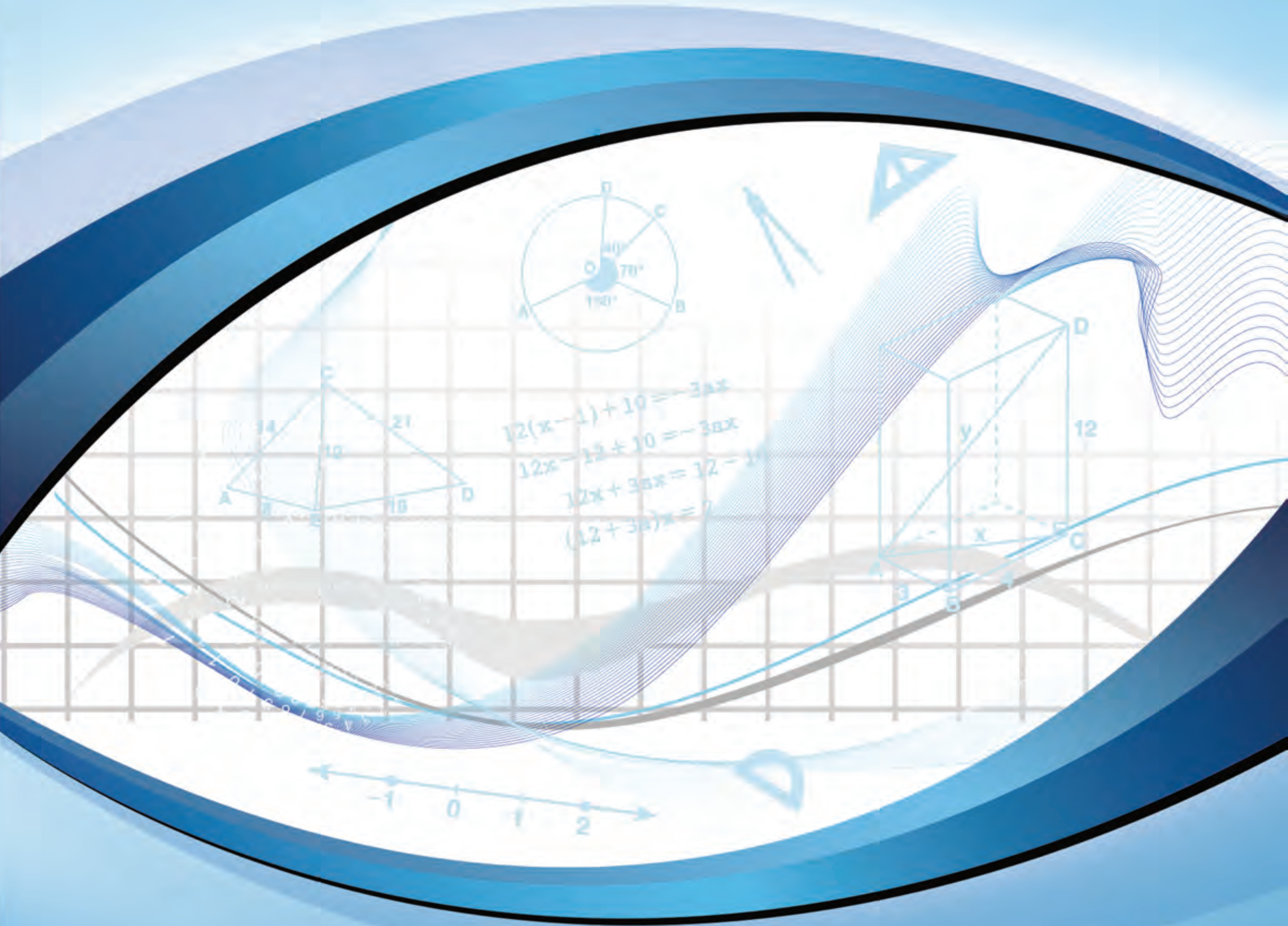
ORTAÖĞRETİM

MATEMATİK

TEMEL DÜZEY DERS KİTABI

11



MHG

ORTAÖĞRETİM

MATEMATİK
11

TEMEL DÜZEY
DERS KİTABI

YAZARLAR

İsmail Sabri GÜMÜŞEL

Mehmet Evren DEVİREN

Bu kitap, Millî Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığının 28.05.2018 tarihli ve 78 sayılı (ekli listenin 180'inci sırasında) kurul kararı ile 2018-2019 öğretim yılından itibaren 5 (beş) yıl süre ile ders kitabı olarak kabul edilmiştir.



KİTAP BASIM YAYIN TİCARET A.Ş.

Her hakkı saklıdır ve **MHG KİTAP BASIM YAYIN TİCARET ANONİM ŞİRKETİ**'ne aittir. İçindeki şekil, yazı, metin ve grafikler, yayınevinin izni olmadan alınamaz; fotokopi, teksir, film şeklinde ve başka hiçbir şekilde çoğaltılamaz, basılamaz ve yayımlanamaz.

ISBN: 978-605-84393-4-4

Dil Uzmanı

Kader KANGAL

Görsel Tasarım Uzmanı

Serkan AVCI

Baskı Yeri ve Yılı

Özgün Matbaacılık, Ankara-2019

Tel: 0 (312) 645 19 10

Matbaa Sertifika No: 44327



KİTAP BASIM YAYIN TİCARET A.Ş.

Akyol Mah. Merkez Sok. No: 240/101 Milas/MUĞLA

tel.: (0.252) 536 62 29 - (0.312) 433 09 01

mhg@mhgyay.com.tr

Yayıncı Sertifika No: 42991



İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

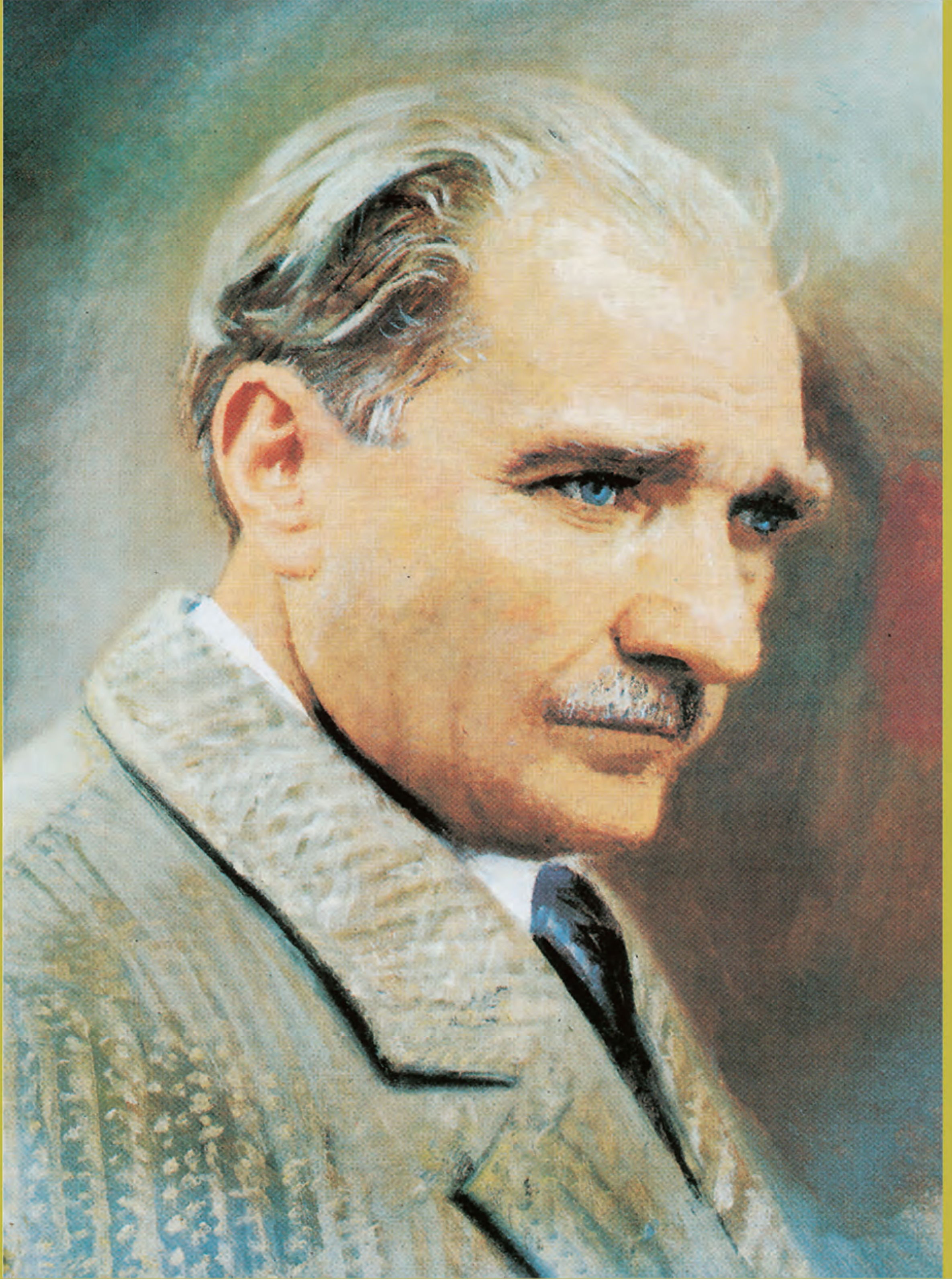
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

İÇİNDEKİLER

KİTABIMIZI TANIYALIM

HAZIR MIYIZ?

Her ünite için gereken önceki konularla ilgili sorulara yer verilmiştir.

HATIRLAYALIM

Geçmişte öğrenilmiş ve hatırlandığında faydalı olacak bilgilere yer verilmiştir.

ÖRNEK

Öğrenmeye çalıştığınız konuyu pekiştirici örneklere yer verilmiştir.



Konuyu işlerken veya problem çözerken hatırlatma ya da ek bilgi ile destek sağlayacak önermelere, ifadelere veya açıklamalara yer verilmiştir.

BİLGİ

Etkinliklerle keşfetmeye ve örneklerle pekiştirmeye çalıştığımız bilgilere, olgulara ve önermelere, ifadelere veya açıklamalara yer verilmiştir.

ETKİNLİK

Konuya ilginizi çekecek, sizi düşündürecek ve merak uyandıracak yazı, resim ya da şekillere; konuları keşfederek öğrenmenizi sağlayacak, arkadaşlarınızla iletişiminizi arttıracak ve psikomotor becerilerinizi geliştirecek uygulamalı çalışmalara yer verilmiştir.

SIRA SİZDE

İşleniş sırasında derse etkin katılımı sağlamak için düşündürmeye yönelik, uzun vadede farklı bakış açısı kazandıracak sorulara yer verilmiştir.

BULMACA

Üst düzey düşünme becerilerinizi geliştirecek eğlenceli sorulara yer verilmiştir.

PROJE

Yapacağınız proje ile ilgili hatırlatmalara ve yönlendirmelere yer verilmiştir.

ALIŞTIRMALAR

İşlenişin ardından konuyu pekiştirmeye yarayan alıştırmalara yer verilmiştir.

ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

Ünitedeki kazanımlarla ilgili çoktan seçmeli sorulara yer verilmiştir.

1. ÜNİTE

SAYILAR



SAYI KÜMELERİ

BÖLÜNEBİLME

HAZIR MIYIZ?

1. Rakam nedir? Rakamların kümesini yazınız.

2. Sonlu ve sonsuz sayı kümelerine birer örnek veriniz.

3. Doğal sayılar $(\mathbb{N})$, tam sayılar $(\mathbb{Z})$, rasyonel sayılar $(\mathbb{Q})$, irrasyonel sayılar $(\mathbb{Q}')$ ve gerçek sayılar $(\mathbb{R})$ kümeleri arasında alt küme olma özelliklerini yazınız.

4. Sayı doğrusu üzerinde rasyonel sayılar dışında başka sayılar var mıdır? Açıklayınız.

5. 16 205 sayısının yüzler basamağındaki rakam kaçtır?

6. 5, 9, 13, 17, 21, ... sayı örüntüsünü üç adım daha devam ettiriniz.

7. 7, 9, 11, 13, ..., 33 sayı örüntüsünde kaç tane doğal sayı vardır?

8. $1+2+3+4+...+39$ toplamını bulunuz.

9. $A=\{1, 2, a, b\}$ ve $B=\{2, 4, b\}$ kümeleri için $A \cap B$ ve $A \cup B$ kümelerini liste yöntemiyle yazınız.

10. Hangi sayılar asaldır? Hangi sayılar aralarında asaldır?

11. En küçük 5 asal sayıyı yazınız.

12. Aralarında asal olan iki sayı yazınız.

13. 127 sayısının asal sayı olup olmadığını belirleyiniz.

14. 360 sayısını asal çarpanlarına ayırınız.

15. 96 sayısının pozitif tam sayı bölenlerini yazınız.

16. Hangi sayılar ardışık iki doğal sayının toplamıdır?

17. Ardışık üç doğal sayının toplamı ortanca sayının kaç katıdır?

18. Tam sayılar kümesinde çarpma işleminin değişme ve birleşme özelliği var mıdır?

19. Doğal sayılar kümesinde çıkarma işleminin değişme özelliği var mıdır? Örnek vererek açıklayınız.

20. $1,\overline{3}=1,333...$ sayısını $\frac{a}{b}$ biçiminde yazınız.

1. BÖLÜM SAYI KÜMELERİ

Sayı Kümelerinin Birbiriyle İlişkilendirilmesi

İnsanoğlu, tarih boyunca sayılar dünyası ile iç içe yaşamıştır. Eğer içinde yaşadığımız evrende ağaç, koyun, keçi, kum tanesi, taş parçaları, yıldız ve gezegenler olmayıp evren sadece bulut gibi tek maddeden oluşmuş olsaydı sayı ve şekil kavramları ortaya çıkmayacaktı. İlk insanların, sayıları "bir koyun", "iki koyun", ... gibi somut olarak kullandıkları şüphesizdir. Zamanla insan zekâsı soyutlama yaparak "bir", "iki" kavramlarına ulaşmıştır.



Şimdi daha önceki sınıflarda öğrendiğimiz sayı kümelerini hatırlayalım.

Doğal Sayılar

BİLGİ

$\{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ kümesine doğal sayılar kümesi denir ve bu küme $\mathbb{N}$ ile gösterilir.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

 **ÖRNEK**

a, b ve c birer doğal sayı olmak üzere,

$$a < b < c$$
$$a + b = 2$$
$$c + b = 5$$

olduğuna göre $a - 2b + c$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$a + b = 2$ ise $(a = 0, b = 2)$, $(a = 1, b = 1)$ veya $(a = 2, b = 0)$ olabilir.

$a < b$ olduğu için $(a = 0, b = 2)$ olmalıdır. ....①

$c + b = 5$ ve $b < c$ ise $(b = 0, c = 5)$ veya $(b = 1, c = 4)$ veya $(b = 2, c = 3)$ olabilir.

① e göre $b = 2$ olduğundan $(b = 2, c = 3)$ olmalıdır. ....②

Buna göre ① ve ② den $a = 0$, $b = 2$ ve $c = 3$ olur. Bu değerleri $a - 2b + c$ ifadesinde yerlerine yazalım ve gerekli işlemleri yapalım.

$$a - 2b + c = 0 - 2(2) + 3$$
$$= 0 - 4 + 3$$
$$= -1$$

SIRA SİZDE

Yukarıdaki örnekte a, b ve c sıfırdan farklı birer doğal sayı olsaydı $a - 2b + c$ ifadesinin değeri kaç olurdu?

Tam Sayılar

BİLGİ

$\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ kümesine tam sayılar kümesi denir ve bu küme $\mathbb{Z}$ ile gösterilir.

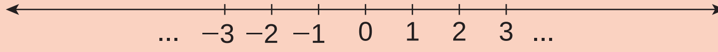
Pozitif tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}^+$ ile, negatif tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}^-$ ile gösterilir.

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\}$$
$$\mathbb{Z}^- = \{..., -3, -2, -1\}$$

Buna göre aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

Tam sayılar, sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki biçimde gösterilir.



... −3 −2 −1 0 1 2 3 ...

SIRA SİZDE

- Sıfır sayısı pozitif ya da negatif midir? Açıklayınız.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ifadesini açıklayınız.

ÖRNEK

a bir tam sayı olmak üzere,

$$\frac{2a-7}{a}$$

ifadesini tam sayı yapan a değerleri kaç tanedir? Bulalım.

Çözüm

$\frac{2a-7}{a}$ ifadesini $\frac{2a}{a} - \frac{7}{a} = 2 - \frac{7}{a}$ biçiminde yazabiliriz.

$2 - \frac{7}{a}$ ifadesinin bir tam sayıya eşit olması için $\frac{7}{a}$ kesri bir tam sayıya eşit olmalıdır.

$\frac{7}{a}$ kesrinin bir tam sayıya eşit olması için a tam sayısının alabileceği değerler -7, -1, 1 ve 7 dir.

O hâlde $\frac{2a-7}{a}$ ifadesini tam sayı yapan a değerleri 4 tanedir.

SIRA SİZDE

a bir tam sayı olmak üzere, $\frac{2a-7}{a}$ ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük tam sayı değerlerini bulunuz.

Rasyonel Sayılar

Sayı doğrusu üzerinde tam sayılar arasında, örneğin -3 ile -2 ya da 1 ile 2 arasında başka sayılar var mıdır? Açıklayalım.

Sayı doğrusu üzerinde iki tam sayının oranı biçiminde yazılan sayılar vardır. $-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}$ gibi.

BİLGİ

a ve b aralarında asal birer tam sayı ve $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ biçiminde yazılabilen sayılara rasyonel sayılar, bu sayıların oluşturduğu kümeye de rasyonel sayılar kümesi denir. Rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ ile gösterilir.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \text{ ve } \text{EBOB}(a, b) = 1\right\}$$

Pozitif rasyonel sayılar kümesini ifade etmek için $\mathbb{Q}^+$ sembolü ve negatif sayılar kümesini ifade etmek için $\mathbb{Q}^-$ sembolü kullanılır. Buna göre aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

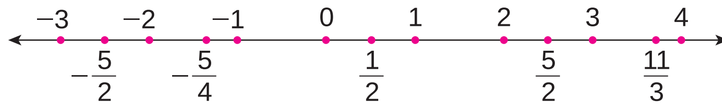
$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$$

Bu tanıma göre

$-\frac{4}{3} \in \mathbb{Q}^-$, $3 \in \mathbb{Q}^+$, $0 \in \mathbb{Q}$ ve $-5 \in \mathbb{Q}^-$ dir $\left(-5 = \frac{-5}{1}\right.$ biçiminde yazılabileceğini düşününüz.).

$a \in \mathbb{Z}$ ve $b = 1$ olmak üzere, a tam sayısı $\frac{a}{b}$ biçiminde yazılabildiğinden $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ dur.

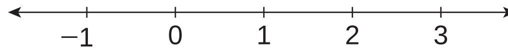
Rasyonel sayılardan birkaçını aşağıdaki biçimde sayı doğrusu üzerinde gösterebiliriz.



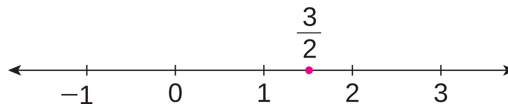
 **ÖRNEK**

Sayı doğrusu üzerinde 1 ile 2 tam sayıları arasına yerleştirilebilecek bir rasyonel sayı bulalım.

Çözüm



1 sayısı $\frac{2}{2}$ ve 2 sayısı $\frac{4}{2}$ biçiminde yazıldığında $\frac{2}{2} < \frac{3}{2} < \frac{4}{2}$ olduğu görülür. Sayı doğrusu üzerinde bu iki sayının arasına $\frac{3}{2}$ rasyonel sayısını aşağıdaki gibi yerleştirebiliriz.



ÖRNEK

Sayı doğrusu üzerinde $\frac{1}{2}$ ile 1 sayıları arasına yerleştirilebilecek üç tane rasyonel sayı bulalım.

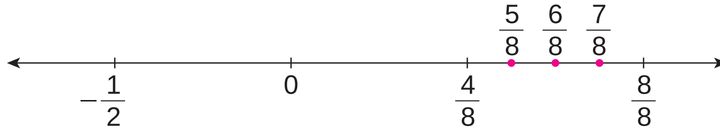
Çözüm



1 sayısını $\frac{8}{8}$ şeklinde yazabiliriz. $\frac{1}{2}$ kesrinin pay ve paydasını 4 ile çarparak kesri genişletelim.

$$\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8}$$

Şimdi $\frac{1}{2}$ yerine $\frac{4}{8}$ ve 1 yerine $\frac{8}{8}$ yazalım. Sayı doğrusu üzerinde bu iki sayının arasına $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{8}$ ve $\frac{7}{8}$ rasyonel sayılarını yerleştirebiliriz.



ÖRNEK

Sayı doğrusu üzerinde 1 ile 2 sayıları arasına en çok kaç tane rasyonel sayı yerleştirebiliriz? Açıklayalım.

Çözüm

1 sayısını $\frac{10}{10}$ ve 2 sayısını $\frac{20}{10}$ şeklinde yazarak sayı doğrusu üzerinde 1 ile 2 sayıları arasına $\frac{11}{10}, \frac{12}{10}, \frac{13}{10}, ..., \frac{19}{10}$ rasyonel sayılarını yerleştirebiliriz.

1 sayısını $\frac{1000}{1000}$ ve 2 sayısını $\frac{2000}{1000}$ şeklinde yazarak sayı doğrusu üzerinde 1 ile 2 sayıları arasına $\frac{1001}{1000}, \frac{1002}{1000}, ..., \frac{1999}{1000}$ rasyonel sayılarını yerleştirebiliriz.

Ele aldığımız kesirlerin paydalarını istediğimiz kadar büyüterek 1 ile 2 sayıları arasına sonsuz sayıda rasyonel sayı yerleştirebiliriz.

BİLGİ

Sayı doğrusu üzerinde verilen iki rasyonel sayı arasına sonsuz sayıda rasyonel sayı yerleştirilebilir. Bununla birlikte, sayı doğrusu üzerindeki her noktaya bir rasyonel sayı karşılık gelmeyebilir.

SIRA SİZDE

Yukarıdaki ifadeyi bir arkadaşınıza kendi cümlelerinizle aktarmaya çalışınız.

ÖRNEK

$\frac{x+4}{x}$ ifadesi bir tam sayıya eşit ise x için ne söylenebilir? Açıklayalım.

Çözüm

$\frac{x+4}{x}$ ifadesini $1+\frac{4}{x}$ biçiminde yazabiliriz. $1+\frac{4}{x}$ bir tam sayıya eşit ise $\frac{4}{x}$ de bir tam sayıya eşittir. Öyleyse $\frac{4}{x}=k$ olacak biçimde bir k tam sayısı vardır.

$\frac{4}{x}=k$ eşitliğinde k tam sayısını $\frac{k}{1}$ biçiminde yazıp içler dışlar çarpımını yapalım.

$$\frac{4}{x}=\frac{k}{1} \Rightarrow xk=4$$

$xk=4$ eşitliğinin her iki tarafını k tam sayısına bölelim.

$$\frac{xk}{k}=\frac{4}{k} \Rightarrow x=\frac{4}{k}$$

Öyleyse k sıfırdan farklı bir tam sayı olmak üzere, x in $\frac{4}{k}$ biçiminde bir rasyonel sayıya eşit olduğu söylenebilir.

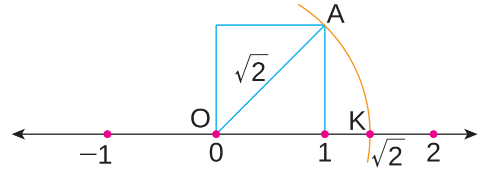
SIRA SİZDE

Yukarıdaki örnekte x in alabileceği tam sayı değerlerini bulunuz.

İrrasyonel Sayılar

Bir kenarının uzunluğu 1 birim olan karenin bir köşegenin uzunluğu $\sqrt{2}$ birimdir.

Şekilde O orijin (sıfırın karşılık geldiği nokta) olmak üzere bir sayı doğrusu ve köşegeni [OA] olan bir kare verilmiştir. O merkezli |OA| yarıçaplı çember yayının sayı doğrusunu kestiği nokta K olsun. Acaba sayı doğrusu üzerindeki K noktasına bir rasyonel sayı karşılık gelir mi? Başka bir deyişle $\sqrt{2}$ bir rasyonel sayı mıdır?

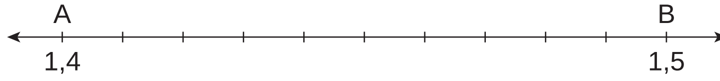


a ve b birer tam sayı olmak üzere, $\sqrt{2}$ sayısı $\frac{a}{b}$ biçiminde yazılamadığı için bir rasyonel sayı değildir.

BİLGİ

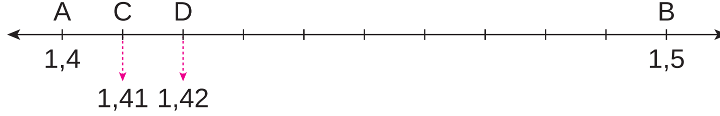
Sayı doğrusu üzerindeki rasyonel olmayan sayılara irrasyonel sayılar denir ve irrasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}'$ sembolü ile gösterilir. İrrasyonel sayılar, ondalık gösterimi (açılımı) sınırsız ve tekrarsız olan sayılardır.

$\sqrt{2}$ irrasyonel sayısının sayı doğrusu üzerindeki yeri, karesi 2 den küçük olan 1,4 sayısı ile karesi 2 den büyük olan 1,5 sayısı arasındadır.



$\sqrt{2}$ sayısı A ile B noktaları arasındadır.

$\sqrt{2}$ sayısının yerini daha küçük hata ile bulmak istersek karesi 2 den küçük olan 1,41 sayısı ile karesi 2 den büyük olan 1,42 sayılarını seçebiliriz.



$\sqrt{2}$ sayısı C ve D noktaları arasındadır.

ÖRNEK

İrrasyonel sayılara örnekler verelim.

Çözüm

Ondalık gösterimleri sınırsız ve tekrarsız olduğu için aşağıdaki sayılar birer irrasyonel sayıdır.

$$\pi = 3,1415...$$
$$\sqrt{2} = 1,4142...$$
$$\sqrt{7} = 2,6457...$$



- 1,2 ve 2,25 sayıları devirli değildir. Bunlar birer rasyonel sayıdır.
- $0,\overline{3}$ ve $1,\overline{45}$ sayıları devirlidir. Bunlar birer rasyonel sayıdır.

ÖRNEK

$x\sqrt{3}+1$ ifadesi bir rasyonel sayıya eşit ise x için ne söylenebilir? Açıklayalım.

Çözüm

$k \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $k = x\sqrt{3}+1$ olsun. Bu durumda $k-1 = x\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ olur. $x\sqrt{3}$ ifadesinin bir rasyonel sayıya eşit olabilmesi için x sayısının $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sqrt{3}$, $-2\sqrt{3}$... gibi bir irrasyonel sayı veya 0 olması gerekir. Örneğin $x=-2\sqrt{3}$ için $x\sqrt{3}+1$ ifadesinin bir rasyonel sayıya eşit olduğunu görelim.

$$x=-2\sqrt{3} \Rightarrow x\sqrt{3}+1 = -2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+1$$
$$= -6+1$$
$$= -5 \in \mathbb{Q}$$

SIRA SİZDE

$2\sqrt{3x+1}$ ifadesi bir rasyonel sayıya eşit ise x için ne söylenebilir?

Gerçek Sayılar

BİLGİ

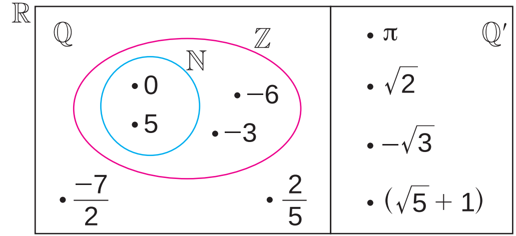
Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşimine gerçek sayılar kümesi denir ve $\mathbb{R}$ sembolü ile gösterilir. Pozitif gerçek sayılar kümesi $\mathbb{R}^+$, negatif gerçek sayılar kümesi $\mathbb{R}^-$ sembolü ile gösterilir. Buna göre aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$$

Yukarıdaki bilgilerden çıkan sonuçları özetleyip Venn şeması ile gösterelim.

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ ve $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ve $\mathbb{Q}' \subset \mathbb{R}$



HATIRLAYALIM

Etkisiz Eleman

Gerçek sayılar kümesinde bir gerçek sayı ile 0'ı (sıfır) topladığımızda veya herhangi bir gerçek sayı ile 1'i çarptığımızda aynı gerçek sayıyı elde ederiz. Buna göre toplama işleminin etkisiz elemanı "0"; çarpma işleminin etkisiz elemanı "1"dir. Bu özelliği aşağıdaki biçimde de ifade edebiliriz.

$a \in \mathbb{R}$ için $a + 0 = 0 + a = a$ ve $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$'dır.

Toplama ve Çarpma İşlemlerine Göre Bir Sayının Tersi

Herhangi iki gerçek sayının toplamı 0 (toplama işleminin etkisiz elemanı) ise bu iki sayıdan herbirine toplama işlemine göre diğerinin tersi denir. Bu özelliği aşağıdaki biçimde de ifade edebiliriz.

$a,\ (-a) \in \mathbb{R}$ için $a + (-a) = -a + a = 0$ olduğundan a'nın toplama işlemine göre tersi $-a$'dır.

Herhangi iki gerçek sayının çarpımı 1 (çarpma işleminin etkisiz elemanı) ise bu iki sayıdan herbirine çarpma işlemine göre diğerinin tersi denir. Bu özelliği aşağıdaki biçimde de ifade edebiliriz.

$a,\ \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ için $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ olduğundan a'nın çarpma işlemine göre tersi $\frac{1}{a}$'dır.

ÖRNEK

$\frac{1}{4}$ ve -3 sayılarının gerçek sayılar kümesinde toplama ve çarpma işlemlerine göre terslerini bulalım.

Çözüm

$\frac{1}{4}$'ün toplama işlemine göre tersi $\frac{-1}{4}$'tür. $\left(\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right) = 0\right)$

$\frac{1}{4}$'ün çarpma işlemine göre tersi 4'tür. $\left(\frac{1}{4} \cdot 4 = 1\right)$

-3'ün toplama işlemine göre tersi 3'tür. $(-3 + 3 = 0)$

-3'ün çarpma işlemine göre tersi $\frac{-1}{3}$'tür. $\left(-3 \cdot \frac{-1}{3} = 1\right)$

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki ifadeleri inceleyerek doğru olanların başına “D”, yanlış olanların başına “Y” yazınız.

( ) **a.** İrrasyonel sayılar birer gerçek sayıdır.

( ) **b.** Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesinin arakesiti boş kümedir.

( ) **c.** Rasyonel sayıların her biri bir gerçek sayıdır.

( ) **ç.** İki gerçek sayının çarpımı da bir gerçek sayıdır.

( ) **d.** İki gerçek sayının toplamı da bir gerçek sayıdır.

( ) **e.** İki irrasyonel sayının çarpımı her zaman bir irrasyonel sayıdır.

( ) **f.** İki rasyonel sayının çarpımı rasyonel olmayabilir.

( ) **g.** Sayı doğrusu üzerinde birbirinden farklı iki gerçek sayıdan solda olanı daha büyüktür.

( ) **h.** Bir pozitif gerçek sayı ile bir negatif gerçek sayının toplamı her zaman pozitiftir.

( ) **ı.** Bir gerçek sayının sıfırla toplamı sıfırdır.

( ) **j.** Bir gerçek sayının sıfırla çarpımı gerçek sayının kendisine eşittir.

( ) **k.** İki irrasyonel sayının toplamı rasyonel sayı olabilir.

2. $-\frac{3}{4}$ ve $\frac{\sqrt{2}}{5}$ sayılarının $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^-, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^-, \mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}', \mathbb{R}, \mathbb{R}^-, \mathbb{R}^+$ sembolleriyle gösterilen sayı kümelerinden hangilerinin elemanı olduğunu $\in$ sembolüyle gösteriniz.

3. $\frac{1}{6}$ ile $\frac{1}{5}$ sayıları arasında olan üç tane rasyonel sayı bulunuz.

4. $\frac{7}{3}$ ile $\frac{62}{12}$ sayıları arasındaki tam sayıları bulunuz.

5. $\frac{1}{7}$ ile $\frac{2}{7}$ sayıları arasında olan bir rasyonel sayı bulunuz.

6. $\frac{a-5}{a+2}$ ifadesinin alabileceği en büyük tam sayı değerini bulunuz.

7. $\frac{12}{a+4}$ ifadesinin bir tam sayıya eşit olabilmesi için a yerine yazılabilecek tam sayı değerlerini bulunuz.

Doğal Sayıların Çözümlenmesi ile İlgili Problemler

HATIRLAYALIM

- 2357 sayısını 10 un kuvvetleri türünden yazalım.

$$2357 = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7 \cdot 1$$
$$= 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 \quad (10^0 = 1)$$

binler ← 2, yüzler ← 3, onlar ← 5, birler ← 7

- 2 405 013 sayısını çözümleyelim.

$$2\ 405\ 013 = 2 \cdot 1\ 000\ 000 + 4 \cdot 100\ 000 + 0 \cdot 10\ 000 + 5 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 3 \cdot 1$$
$$= 2 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 0 + 5 \cdot 10^3 + 0 + 1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$
$$= 2 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

- $4 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$ biçiminde verilen doğal sayıyı bulalım.

Verilen sayıda 10^5 ve 10^0 terimli ifadeler bulunduğundan 10^5 ten başlayarak 10^0 a kadar 10 un azalan kuvvetlerini, ardından katsayılarını yazalım.

$$4 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = ...10^5 + ...10^4 + ...10^3 + ...10^2 + ...10^1 + ...10^0$$
$$= 4 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

↓ 4 0 0 0 2 3

$$= 400\ 023$$

Çözümlenmiş biçimi verilen doğal sayı 400 023 tür.

ÖRNEK

A ve B birer rakam olmak üzere AA, ABA, AAB ve BAAB doğal sayılarını çözümleyelim.

Çözüm

$$AA = A \cdot 10 + A \cdot 1 = 11 \cdot A$$
$$ABA = A \cdot 100 + B \cdot 10 + A \cdot 1 = 101 \cdot A + 10 \cdot B$$
$$AAB = A \cdot 100 + A \cdot 10 + B \cdot 1 = 110 \cdot A + B$$
$$BAAB = B \cdot 1000 + A \cdot 100 + A \cdot 10 + B \cdot 1 = 1001 \cdot B + 110 \cdot A$$



A, B, C ve D birer rakam olmak üzere AB, ABC ve ABCD doğal sayıları

$$AB = 10 \cdot A + B$$
$$ABC = 100 \cdot A + 10 \cdot B + C$$
$$ABCD = 1000 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + D$$

biçiminde çözümlenir.

ÖRNEK

AB ve BA iki basamaklı birer doğal sayı olmak üzere

$$AB + BA = 187$$

olduğuna göre $A + B$ toplamını bulalım.

Çözüm

Verilen eşitlikte sayıları çözümlenmiş biçimde yazıp $A + B$ toplamını bulalım.

$$AB + BA = 187$$
$$(10 \cdot A + B) + (10 \cdot B + A) = 187$$
$$11 \cdot A + 11 \cdot B = 187$$
$$11 \cdot (A + B) = 187$$
$$A + B = \frac{187}{11}$$
$$A + B = 17$$

SIRA SİZDE

AB ve BA iki basamaklı birer sayı olmak üzere

$$AB + BA = 176$$

olduğuna göre $A + B$ toplamını bulunuz.

ÖRNEK

AB, BA ve B7 iki basamaklı birer doğal sayı olmak üzere

$$AB - BA = B7$$

olduğuna göre $A + B$ toplamını bulalım.

Çözüm

Verilen eşitlikte AB ve BA sayılarını çözümlenmiş biçimde yazalım.

$$AB - BA = B7$$
$$(10 \cdot A + B) - (10 \cdot B + A) = B7$$
$$10 \cdot A + B - 10 \cdot B - A = B7$$
$$9 \cdot A - 9 \cdot B = B7$$
$$9 \cdot (A - B) = B7 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Son eşitlikte 9 sayısı $A - B$ ile çarpılmış ve birler basamağı 7 olan iki basamaklı bir doğal sayı elde edilmiştir. 9 un iki basamaklı katları arasında (18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99) birler basamağı 7 olan sayı sadece 27 dir.

Buna göre (1) eşitliğini aşağıdaki biçimde yazabiliriz.

$$9\underbrace{(A - B)} = B7 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$9 \cdot 3 \quad = 27$$

Buna göre $B = 2$ ve $A - B = 3 \Rightarrow \quad A = 5$

$\Rightarrow \; A + B = 5 + 2 = 7$ olur.

ÖRNEK

İki basamaklı AB doğal sayısı, iki basamaklı BA doğal sayısından rakamlarının toplamı kadar fazladır. Buna göre, A ve B rakamlarını bulalım.

Çözüm

Verilenlere göre aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$AB = BA + A + B$$

Verilen eşitlikte AB ve BA sayılarını çözümlenmiş biçimde yazalım.

$$10 \cdot A + B = 10 \cdot B + A + A + B$$

$$10 \cdot A - A - A = 10 \cdot B + B - B$$

$$8 \cdot A = 10 \cdot B$$

$$\frac{A}{B} = \frac{10}{8}$$

$$= \frac{5}{4}$$

$\frac{A}{B} = \frac{5}{4}$ ise $A = 5$ ve $B = 4$ tür (A ve B'nin birer rakam olduğunu hatırlayınız.).

SIRA SİZDE

Bir matematik öğretmeni şöyle bir tanım yapıyor: "Bir doğal sayının rakamları toplamı ile rakamları çarpımı toplandığında sayının kendisi elde ediliyorsa bu sayıya soysayı denir." Bu tanıma göre üç farklı soysayı yazınız. Soysayıların ortak özelliğini belirtiniz.

ÖRNEK

A ve B birer rakam olmak üzere dört basamaklı 3AB3 doğal sayısı, üç basamaklı 2AB doğal sayısının 9 katının 1255 fazlasına eşittir. Buna göre A ve B rakamlarını bulalım.

Çözüm

Verilen iki doğal sayı arasındaki eşitliği yazalım.

$$3AB3 = 9 \cdot 2AB + 1255$$

Yukarıdaki eşitlikteki 3AB3 ve 2AB sayılarını çözümleyelim.

$$3000 + 100 \cdot A + 10 \cdot B + 3 = 9(200 + 10 \cdot A + B) + 1255$$ (Gerekli işlemleri yapalım.)

$$3003 + 100 \cdot A + 10 \cdot B = 1800 + 1255 + 90 \cdot A + 9 \cdot B$$

$$100 \cdot A + 10 \cdot B - 90 \cdot A - 9 \cdot B = 1800 + 1255 - 3003$$

$$10 \cdot A + B = 3055 - 3003$$

$$10 \cdot A + B = 52$$ ($10 \cdot A + B$ yerine AB yazalım.)

$$AB = 52$$

Yukarıdaki eşitliğe göre $A = 5$ ve $B = 2$ bulunur.

ÖRNEK

Üç basamaklı ABC doğal sayısının sağına 4 rakamı yazılarak dört basamaklı ABC4 sayısı, soluna 5 rakamı yazılarak dört basamaklı 5ABC sayısı elde ediliyor.

$$ABC4 + 5ABC = 6379$$

olduğuna göre $A + B + C$ toplamını bulalım.

Çözüm

Verilen ABC sayısını a ile temsil edelim ve çözümlenmiş biçimini yazalım.

$$a = ABC = 100 \cdot A + 10 \cdot B + C$$

ABC sayısının sağına sıfır eklediğimizi düşünelim. Bu durumda ABC sayısını 10 ile çarpmış oluruz.

$$10a = ABC0 = 1000 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + 0$$

Elde ettiğimiz eşitlikte sıfır yerine 4 yazalım. Her üç ifadeye de 4 eklemiş oluruz.

$$10a + 4 = ABC4 = 1000 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ABC sayısının soluna 5 ekleyelim. Elde ettiğimiz 5ABC sayısı ile ABC sayısını karşılaştıralım.

$$ABC = 100 \cdot A + 10 \cdot B + C$$
$$5ABC = 5000 + 100 \cdot A + 10 \cdot B + C$$
$$5ABC = 5000 + ABC$$

Demek ki 5ABC sayısı $a = ABC$ sayısından 5000 fazladır. Buna göre aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$5ABC = a + 5000 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(1) ve (2) numaralı bağıntıları alt alta yazalım ve toplayalım.

$$\begin{array}{r} ABC4 = 10a + 4 \\ + \quad 5ABC = a + 5000 \\ \hline ABC4 + 5ABC = 11a + 5004 \end{array}$$

($ABC4 + 5ABC = 6379$ eşitliğini kullanalım.)

$$6379 = 11a + 5004$$
$$6379 - 5004 = 11a$$
$$1375 = 11a$$
$$a = \frac{1375}{11}$$
$$a = 125$$

$a = ABC = 125$ olduğundan $A = 1$, $B = 2$ ve $C = 5$ tir.

$A + B + C$ toplamını bulalım.

$$A + B + C = 1 + 2 + 5$$
$$= 8$$

Buna göre $A + B + C$ toplamı 8 dir.

ÖRNEK



Esra Hanım aldığı gömleğin ücretini ödemek için kasiyere kredi kartını veriyor. Gömleğin fiyatı a lira b kuruş iken kasiyer kredi kartından yanlışlıkla b lira a kuruş çekiyor. Esra Hanım durumu fark ediyor ve hemen kasiyere bildiriyor. Kasiyer de Esra Hanım'a bu davranışı için teşekkür ederek eksik aldığı 19 lira 80 kuruşu kredi kartından tekrar çekiyor.

Yukarıda belirtilen a ve b sayıları iki basamaklı birer doğal sayı ve $a+b=70$ olduğuna göre gömleğin fiyatını bulalım.

Çözüm

Gömleğin fiyatı a lira b kuruş ve a ile b sayıları iki basamaklı birer doğal sayı olduğuna göre aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz (A, B, C ve D birer rakam olmak üzere).

$$a = AB$$
$$b = CD$$
$$a+b=70 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Gömleğin fiyatı AB,CD biçimindedir. Bu parayı kuruş olarak yazalım.

$$AB{,}CD = 100a + b \text{ kuruş}$$

Kasiyerin ilk seferde kredi kartından çektiği miktarı kuruş olarak yazalım.

$$CD{,}AB = 100b + a \text{ kuruş}$$

Gömleğin fiyatı ile kasiyerin çektiği miktar arasındaki farkı kuruş olarak yazalım.

$$(100a+b)-(100b+a)=1980$$
$$100a-a+b-100b=1980$$
$$99a-99b=1980$$
$$99(a-b)=1980$$
$$a-b=\frac{1980}{99}$$
$$a-b=20 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$



$$19 \text{ lira} = 19 \cdot 100 \text{ kuruş}$$
$$= 1900 \text{ kuruş}$$
$$19 \text{ lira } 80 \text{ kuruş} = (1900+80) \text{ kuruş}$$
$$= 1980 \text{ kuruş}$$

(1) ve (2) numaralı denklemlerden a ve b değerlerini bulalım.

$$a+b=70 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$+\ a-b=20 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$2a=90$$
$$a=45 \Rightarrow a+b=70 \quad \text{(a yerine 45 yazalım.)}$$
$$\Rightarrow 45+b=70$$
$$\Rightarrow b=70-45$$
$$\Rightarrow b=25$$

Buna göre gömleğin fiyatı 45 lira 25 kuruş yani 45,25 TL'dir.

ÖRNEK



Arzu, telefon faturasını ödemek üzere bankaya gidiyor ve sıra numarasını gösteren işlem fişini alıyor. Sıranın kendisine gelmesine 2 kişi kala yaşlı bir teyzenin ayakta sıra beklediğini görüyor ve ona yardımcı olmak istiyor. Kendi fişini teyzenin fişi ile değiştiriyor. Bu durumda sıranın Arzu'ya gelmesine 24 kişi kalıyor.

Arzu'nun fişindeki sıra numarası 3A, teyzenin fişindeki sıra numarası da A7 biçiminde iki basamaklı birer doğal sayı olduğuna göre A harfi hangi rakamın yerine kullanılmıştır? Bulalım.

Çözüm

Arzu ile yaşlı teyze fişlerini değiştirdiği anda sıranın Arzu'ya gelmesine 2 kişi kaldığından bu esnada gişede $3A - 2$ sıra numaralı fişe sahip kişinin işlemi yapılıyordur.

Arzu ile yaşlı teyze fişlerini değiştirdikten sonra sıranın Arzu'ya gelmesine 24 kişi kaldığından aşağıdaki eşitliği yazabilir ve A rakamını bulabiliriz.

$$A7 - (3A - 2) = 24$$

$$10 \cdot A + 7 - (30 + A - 2) = 24$$

$$10 \cdot A + 7 - 28 - A = 24$$

$$9 \cdot A = 24 + 21$$

$$9 \cdot A = 45$$

$$A = 5$$

O hâlde A harfi 5 rakamı yerine kullanılmıştır.

BULMACA

Sıfırdan farklı rakamlarla oluşturulan ABC üç basamaklı doğal sayılarına →, ←, ⟷ sembolleriyle ifade edilen aşağıdaki eşitlikler tanımlanıyor.

$$\overrightarrow{ABC} = CAB$$
$$\overleftarrow{ABC} = BCA$$
$$\overleftrightarrow{ABC} = CBA$$

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. $\overrightarrow{471} + \overleftarrow{125} = \overleftrightarrow{ABC}$ olduğuna göre A, B ve C rakamlarını bulunuz.
2. $\overrightarrow{357} = ABC$ olduğuna göre $\overleftarrow{ABC}$ hangi sayıya eşittir? Bulunuz.
3. $\overleftrightarrow{ABC} = ABC$ eşitliğini sağlayan kaç tane üç basamaklı doğal sayı olduğunu bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

1. 742 031 doğal sayısını çözümleyiniz.

2. Çözümlenmiş biçimi $4 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^0$ olan doğal sayıyı yazınız.

3. Üç basamaklı 7AB sayısı, iki basamaklı AB sayısının 21 katına eşittir. Buna göre $A + B$ toplamını bulunuz.

4. Onlar basamağında A rakamı bulunan tüm iki basamaklı doğal sayıların toplamı 245 tir. Buna göre A rakamını bulunuz.

5. Üç basamaklı ABC doğal sayısı ile iki basamaklı AB doğal sayısının toplamı 353 tür. Buna göre $A + B + C$ toplamını bulunuz.

6. Üç basamaklı AAB doğal sayısı, rakamları toplamının 10 katından 108 fazladır. Buna göre $A + B$ toplamını bulunuz.

7. İki basamaklı AB doğal sayısının sağına 2 eklendiğinde sayının değeri 344 artıyor. Buna göre $A + B$ toplamını bulunuz.

8. Üç basamaklı A0B doğal sayısı, iki basamaklı AB doğal sayısının 7 katına eşittir. Buna göre $A + B$ toplamını bulunuz.

9. Üç basamaklı ABC doğal sayısı ile iki basamaklı CA doğal sayısının farkı 350 dir. Buna göre $A + B + C$ toplamını bulunuz.

10. Üç basamaklı ABC doğal sayısının sağına 5 eklenerek dört basamaklı ABC5 sayısı ve soluna 6 eklenerek dört basamaklı 6ABC sayısı elde ediliyor. $ABC5 + 6ABC = 9536$ olduğuna göre $A + B + C$ toplamını bulunuz.

11. Bir ayakkabı mağazasında çalışan Ali, kampanyaya giren bir ayakkabının fiyatını %25 ucuzlatarak etiketine yazacaktır. Ali, yazması gereken yeni fiyatı belirliyor fakat etikete AB TL yazması gerekirken yanlışlıkla BA TL yazıyor. Bu durumda Ali, ayakkabının fiyatını %43 ucuzlatmış oluyor. Buna göre ayakkabının ilk fiyatını bulunuz.

Eşit Miktarda Artarak Devam Eden Doğal Sayıların Toplamı

Aşağıda verilen doğal sayıları inceleyelim.

$$3, 6, 9, 12, ..., 84, 87$$

Verilen sayılar 3 ile başlamış, üçer artarak devam etmiş ve 87 sayısıyla sonlanmıştır.

$$3, \ 6, \ 9, \ 12, ..., 84, \ 87$$

+3 +3 +3 +3

Bu doğal sayıların kaç tane olduğunu bulmaya çalışalım.

1. sayı: $3 = 3 \cdot 1$

2. sayı: $6 = 3 \cdot 2$

3. sayı: $9 = 3 \cdot 3$

4. sayı: $12 = 3 \cdot 4$

⋮ ⋮

$(n-1)$. sayı: $84 = 3 \cdot (n-1)$

n. sayı: $87 = 3 \cdot n$

Yukarıdaki eşitlikleri incelediğimizde verilen sayıların n tane olduğunu söyleyebiliriz. Peki n değerini nasıl bulabiliriz?

n değerini $87 = 3 \cdot n$ eşitliğinden kolayca bulabiliriz. n değerini bulunuz.


ÖRNEK

84, 91, 98, ..., 217, 224 doğal sayıları veriliyor. Bu sayıların kaç tane olduğunu bulalım.

Çözüm

Bu sayılar 7 ile tam bölünebilen 84 sayısı ile başlamış, yedişer artarak devam etmiş ve 224 sayısıyla sonlanmıştır.

$$84, \ 91, \ 98, ..., 217, \ 224$$

+7 +7 +7

Öyleyse verilen sayıların tümü 7 ile bölünür.

$$84, \ 91, \ 98, ..., \ 217, \ 224$$

$$7 \cdot 12, \ 7 \cdot 13, \ 7 \cdot 14, ..., \ 7 \cdot 31, \ 7 \cdot 32$$

O hâlde 84, 91, 98, ..., 217, 224 doğal sayılarının sayısı ile 12, 13, 14, ..., 31, 32 doğal sayılarının sayısı eşittir.

$$\underbrace{12, 13, 14, ..., 31, 32}_{21 \text{ tane}}$$

12, 13, 14, ..., 31, 32 sayı grubunda 21 tane sayı olduğundan verilen sayı grubunda da 21 tane sayı vardır.

ÖRNEK

39, 44, 49, ..., 124, 129 doğal sayıları veriliyor. Bu sayıların kaç tane olduğunu iki yolla bulalım.

Çözüm

Bu sayılar 39 ile başlamış, beşer artarak devam etmiş ve 129 sayısıyla sonlanmıştır.

$$39, \quad 44, \quad 49, \ldots, \quad 124, \quad 129$$

+5 +5 +5

1. sayı $39 = 34 + 5$ biçiminde yazılabildiğinden ve diğer sayılar beşer artarak devam ettiğinden verilen tüm sayıları 34 sayısına 5 in katlarını ekleyerek elde edebiliriz.

1. sayı: $39 = 34 + 5 \cdot 1$

2. sayı: $44 = 34 + 5 \cdot 2$

⋮ ⋮

$(n-1)$. sayı: $124 = 34 + 5 \cdot (n-1)$

n. sayı: $129 = 34 + 5 \cdot n$

Yukarıdaki eşitlikleri incelediğimizde verilen sayıların n tane olduğunu söyleyebiliriz.

1. yol: $129 = 34 + 5 \cdot n$ eşitliğine göre $n = 19$ olduğundan 19 tane doğal sayı verilmiştir.

2. yol: Son sayıdan ilk sayıyı çıkaralım. Bulduğumuz sayıyı artış miktarına bölelim.

n. sayı: $129 = 34 + 5n$

1. sayı: $- \quad 39 = 34 + 5$

$$90 = 5n - 5 \Rightarrow \frac{90}{5} = \frac{5(n-1)}{5} \Rightarrow 18 = n - 1$$

n değeri bulduğumuz 18 değerinden 1 fazladır. $n = 19$ dur.

BİLGİ

Eşit miktarda artarak devam eden sınırlı sayıdaki doğal sayıların kaç tane olduğu

$$\frac{\text{son sayı} - \text{ilk sayı}}{\text{artış miktarı}} + 1$$

formülüyle bulunur.

ÖRNEK

14, 20, 26, ..., 170, 176 doğal sayıları veriliyor. Bu sayıların kaç tane olduğunu bulalım.

Çözüm

Verilen sayılar 14 ile başlamış, altışar artarak devam etmiş ve 176 sayısıyla sonlanmıştır. Bu verileri formülde yerlerine yazalım.

$$\frac{\text{son sayı} - \text{ilk sayı}}{\text{artış miktarı}} + 1 = \frac{176 - 14}{6} + 1 = \frac{162}{6} + 1 = 28$$

O hâlde 28 tane doğal sayı verilmiştir.

ÖRNEK

70, 77, 84, ..., 210, 217, ..., 343, 350, 357 doğal sayıları veriliyor.

a. Kaç tane sayı verildiğini bulalım.

b. Verilen tüm sayıların toplamını bulalım.

Çözüm

a. Verilen sayılar 70 ile başlamış, yedişer artarak devam etmiş ve 357 sayısıyla sonlanmıştır. Buna göre kaç tane sayı verildiğini bulalım.

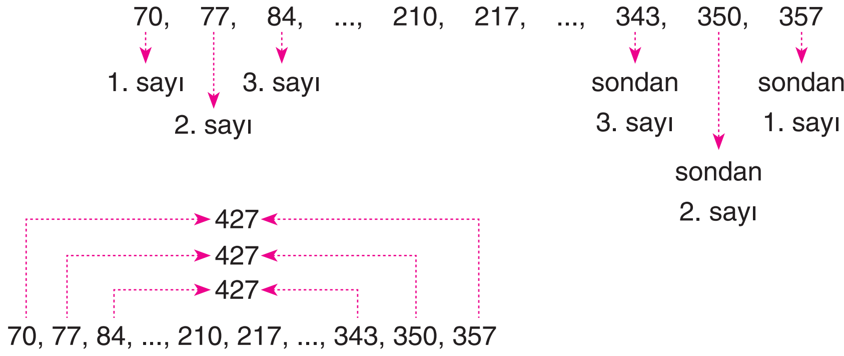
$$\frac{357-70}{7}+1=\frac{287}{7}+1$$

$$=41+1$$

$$=42$$

O hâlde 42 tane sayı verilmiştir.

b. Bu 42 sayının toplamını bulmak için sayıları aşağıdaki gibi numaralandıralım.



Baştan 1. sayı ile sondan 1. sayıyı toplayalım. $70+357=427$

Baştan 2. sayı ile sondan 2. sayıyı toplayalım. $77+350=427$

Baştan 3. sayı ile sondan 3. sayıyı toplayalım. $84+343=427$

⋮

Baştan 21. sayı ile sondan 21. sayının toplamı da 427 olur.

Verilen 42 sayıyı ikişer ikişer grupladığımızda $\frac{42}{2}=21$ sayı çifti elde ederiz. Bu sayı çiftlerinin her birinin toplamı 427 dir.

Buna göre verilen tüm sayıların toplamını aşağıdaki çarpma işlemiyle bulabiliriz.

$$\begin{array}{r} 427 \\ \times \quad 21 \\ \hline 427 \\ +\ 854 \\ \hline 8967 \end{array}$$



Verilen doğal sayıların sayısı bu örnekte olduğu gibi bir çift sayı ise sayıların toplamını bu yöntemle bulabiliriz.

Tüm sayıların toplamı 8967 dir.

ÖRNEK

8, 17, 26, ..., 152, 161, 170 doğal sayıları veriliyor.

a. Kaç tane sayı verildiğini bulalım.

b. Verilen tüm sayıların toplamını bulalım.

Çözüm

a. Verilen sayılar 8 ile başlamış, dokuzar artarak devam etmiş ve 170 sayısıyla sonlanmıştır. Buna göre kaç tane sayı verildiğini bulalım.

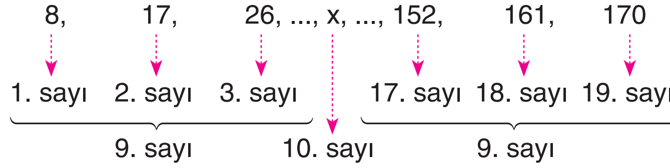
$$\frac{170-8}{9}+1=\frac{162}{9}+1$$

$$=18+1$$

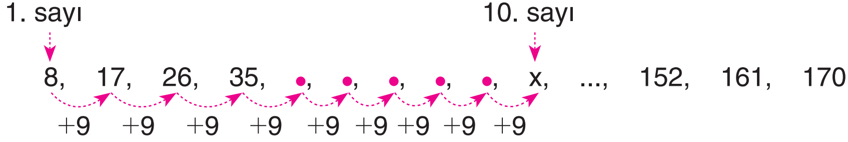
$$=19 \text{ .... (1)}$$

O hâlde 19 tane sayı verilmiştir.

b. Bu 19 sayının toplamını bulmak için sayıları aşağıdaki gibi numaralandıralım.



Şimdi de en ortadaki sayıyı (yani 10. sayıyı) bulmak için 1. sayı olan 8 in üzerine 9 defa 9 u ekleyelim.



Buna göre aşağıdaki eşitliği yazıp x'i bulabiliriz.

$$x=8+9\cdot 9$$

$$=8+81$$

$$x=89 \text{ .... (2)}$$

(1) ve (2) eşitliklerinde bulduğumuz değerleri aşağıdaki formülde yerlerine yazıp verilen sayı grubunun toplamını bulalım.

$$\text{Sayı grubunun toplamı}=\left(\text{Gruptaki doğal sayıların sayısı}\right)\cdot\left(\text{Grubun ortanca sayısı}\right)$$

$$=19\cdot 89$$

$$=1691$$

Tüm sayıların toplamı 1691 dir.



Verilen doğal sayıların sayısı yukarıdaki örnekte olduğu gibi bir tek sayı ise sayıların toplamını bu yöntemle bulabiliriz.

ÖRNEK

20, 28, 36, ..., 116, 124, 132 doğal sayıları veriliyor.

a. Kaç tane sayı verildiğini bulalım.

b. Verilen tüm sayıların toplamını bulalım.

Çözüm

a. Verilen sayılar 20 ile başlamış, sekizer artarak devam etmiş ve 132 sayısıyla sonlanmıştır. O hâlde bu sayılar

$$\frac{132-20}{8}+1=\frac{112}{8}+1=15 \text{ tanedir.}$$

b. Verilen sayıları önce veriliş sırasında sonra da ters (azalan) sırada alt alta yazarak taraf tarafa toplayalım.

20,	28,	36,	...,	116,	124,	132
+ 132,	+ 124,	+ 116,	...,	+ 36,	+ 28,	+ 20
152,	152,	152,	...,	152,	152,	152

Böylece 15 tane 152 sayısı elde ettik. Bu sayıların toplamı da verilen sayıların toplamının iki katına eşit olduğundan 20, 28, 36, ..., 116, 124, 132 sayılarının toplamı

$$\frac{152\cdot 15}{2}=76\cdot 15=1140 \text{ tır.}$$

BİLGİ

Eşit miktarda artarak devam eden sınırlı sayıdaki doğal sayıların toplamı

$$\left(\frac{\text{son sayı}+\text{ilk sayı}}{2}\right)\underbrace{\left(\frac{\text{son sayı}-\text{ilk sayı}}{\text{artış miktarı}}+1\right)}_{\text{Verilen sayıların sayısı}}$$

formülüyle bulunur.

ÖRNEK

Aşağıda verilen doğal sayılarının toplamını bulalım.

a. 19, 23, 27, ..., 107, 111, 115

b. 19, 25, 31, ..., 103, 109, 115

Çözüm

a. Verilen sayılar 19 ile başlamış, dörder artarak devam etmiş ve 115 sayısıyla sonlanmıştır. Bu verileri yukarıdaki formülde yerine yazalım.

$$\left(\frac{115+19}{2}\right)\left(\frac{115-19}{4}+1\right)=\frac{134}{2}\left(\frac{96}{4}+1\right)=67\cdot 25=1675$$

Öyleyse verilen sayıların toplamı 1675 tir.

b. Verilen sayılar 19 ile başlamış, altışar artarak devam etmiş ve 115 sayısıyla sonlanmıştır. Bu verileri yukarıdaki formülde yerine yazalım.

$$\left(\frac{115+19}{2}\right)\left(\frac{115-19}{6}+1\right)=\frac{134}{2}\left(\frac{96}{6}+1\right)=67\cdot 17=1139$$

Öyleyse verilen sayıların toplamı 1139 dur.

ÖRNEK

Dünyada sadece Şanlıurfa Birecik'te ve Fas'ta bulunan kelaynak kuşlarının en önemli özelliklerinden birisi tek eşli olmalarıdır. Bolluk, bereketi simgeleyen ve Birecik'in sembolü olan bu kuşlar; bozkırların ve geleneksel tarım yapılan arazilerin kaybı, beslenme alanlarının yok olması ve üreme alanlarındaki insan baskıları gibi nedenlerle yok olma tehlikesi altındadır. Kelaynakların yok olmasını önlemek amacıyla Orman Genel Müdürlüğü tarafından 1977 yılında "Kelaynak Üretme İstasyonu" kurulmuştur.



http://www.birecik.gov.tr/kelaynak-kuslari

Kelaynak Üretme İstasyonu'nun kurulduğu 1977 yılında 5 kelaynak doğaya bırakılmış olsun. Sonraki yıllarda ise doğaya bırakılan kelaynakların sayısının bir önceki yıla göre 3 arttığını varsayalım. Buna göre 2017 yılı sonu itibariyle doğaya bırakılan kelaynakların toplam sayısını bulalım.

Çözüm

Yıllara göre doğaya bırakılan kelaynak sayısını bulalım.

1977 yılında (1. yıl) 5

1978 yılında (2. yıl) $5+1\cdot 3=8$

1979 yılında (3. yıl) $5+2\cdot 3=11$

⋮

2016 yılında (40. yıl) $5+39\cdot 3=122$

2017 yılında (41. yıl) $5+40\cdot 3=125$

Yıllara göre doğaya bırakılan kelaynak sayılarını yazalım.

5, 8, 11, ..., 122, 125

Böylece, 5 ile başlayan üçer artarak devam eden ve 125 ile sonlanan 41 doğal sayı elde etmiş olduk. Bu sayıların toplamını bulalım.

1. sayı ile 41. sayıyı toplayalım. $5+125=130$

2. sayı ile 40. sayıyı toplayalım. $8+122=130$

⋮

20. sayı ile 22. sayının toplamı da 130 olacaktır. $62+68=130$

Toplamları 130 olan 20 sayı çifti elde ettik.

21. sayı $5+20\cdot 3=65$ tir.

O hâlde tüm sayıların toplamı $20\cdot 130+65=2665$ olduğundan 2017 yılı sonu itibariyle toplam 2665 kelaynak doğaya bırakılmıştır.

ÖRNEK

Bir antik tiyatroda arka arkaya dizilmiş 20 sıra hâlinde oturma yeri vardır. İlk sıra 44 kişiliktir. Ondan sonraki her sıraya bir önceki sıradan 21 kişi fazla oturabilmektedir.



Bu tiyatronun kaç kişilik olduğunu bulalım.

Çözüm

1. sırada 44 kişilik yer vardır.

2. sırada $44+21=65$ kişilik yer vardır.

3. sırada $65+21=86$ kişilik yer vardır.

4. sırada $86+21=107$ kişilik yer vardır.

Diğer sıralardaki oturma yeri sayısını gösteren aşağıdaki tabloyu oluşturalım.

Sıra Numarası	Oturma Yeri Sayısını Veren İfade	Oturma Yeri Sayısı
1.	44	44
2.	$44+1\cdot 21$	65
3.	$44+2\cdot 21$	86
4.	$44+3\cdot 21$	107
⋮	⋮	⋮
19.	$44+18\cdot 21$	422
20.	$44+19\cdot 21$	443

Son sütunda elde ettiğimiz sayıları yazalım.

44, 65, 86, 107, ..., 422, 443

Böylece 44 ile başlayan yirmi birer artarak devam eden ve 443 ile sonlanan 20 doğal sayı elde etmiş olduk. Bu sayıların toplamını bulalım.

Elde ettiğimiz birinci sayı ile yirminci sayının toplamını bulalım.

$$44+443=487$$

Aynı düşünce ile,

İkinci sayı ile on dokuzuncu sayının toplamı 487,

Üçüncü sayı ile on sekizinci sayının toplamı 487,

⋮

Onuncu sayı ile on birinci sayının toplamı 487 dir.

Böylece toplamları 487 olan 10 sayı çifti elde edildiğinden tiyatro $487\cdot 10=4870$ kişiliktir.

ÖRNEK

Otogar yapımı ihalesini alan bir inşaat firması, şartnameye göre otogarı 29 Ekim 2018 tarihinde bitirerek teslim edecektir. Eğer teslimat gecikirse firma,



İlk hafta için 5000 TL,

İkinci hafta için 6500 TL,

Üçüncü hafta için 8000 TL

olacak biçimde, geciktiği her hafta için bir önceki cezadan 1500 TL fazla tazminat ödeyecektir.

Örneğin 4 haftalık gecikme için firmanın ödeyeceği tazminat,

$5000 + 6500 + 8000 + 9500 = 29\ 000$ TL olacaktır.

Bu firma otogarı belirtilen tarihten 10 hafta sonra teslim ederse ödeyeceği toplam tazminat miktarını bulalım.

Çözüm

Firmanın geciktiği her hafta için ödeyeceği tazminat miktarlarını bulalım.

1. hafta için 5000 TL

2. hafta için $5000 + 1 \cdot 1500 = 6500$ TL

3. hafta için $5000 + 2 \cdot 1500 = 8000$ TL

⋮

10. hafta için $5000 + 9 \cdot 1500 = 18\ 500$ TL

Firmanın geciktiği haftalara göre ödeyeceği tazminat miktarlarını yazalım.

5000, 6500, 8000, ..., 18 500

1. hafta 2. hafta 3. hafta 10. hafta

Böylece 5000 ile başlayan bin beş yüzer artarak devam eden ve 18 500 ile sonlanan 10 doğal sayı elde etmiş olduk. Bu sayıların toplamını bulalım.

$$\left(\frac{\text{son sayı} + \text{ilk sayı}}{2}\right)\left(\frac{\text{son sayı} - \text{ilk sayı}}{\text{artış miktarı}} - 1\right)$$

formülünde değerleri yerine yazalım.

$$\left(\frac{18\ 500 + 5000}{2}\right)\left(\frac{18\ 500 - 5000}{1500} + 1\right) = \frac{23\ 500}{2}\left(\frac{13\ 500}{1500} + 1\right) = 11\ 750 \cdot 10$$
$$= 117\ 500$$

O hâlde firma otogarı belirtilen tarihten 10 hafta sonra teslim ederse toplam 117 500 TL tazminat öder.

ALIŞTIRMALAR

1. 15, 21, 27, ..., 609 doğal sayıları veriliyor.
   a. Kaç tane sayı verildiğini bulunuz.
   b. Verilen tüm sayıların toplamını bulunuz.

2. 28, 40, 52, ..., 256 doğal sayıları veriliyor.
   a. Kaç tane sayı verildiğini bulunuz.
   b. Verilen tüm sayıların toplamını bulunuz.

3. Aysun, kumbarasına ilk gün 6 TL atıyor. Sonra, her gün bir öncekinden 3 TL fazla atarak bu işe devam ediyor. Buna göre Aysun'un kumbarasında 15 günde kaç TL birikmiştir?

4. Bir sinemanın ön sırasında 14 koltuk, bundan sonraki her sırada ise bir öncekinden 3 fazla koltuk vardır. Bu sıralar önden başlayarak arkaya doğru A, B, C, D, E ve F olarak isimlendirildiğine göre sinema kaç kişiliktir?



5. Bir okulda yapılan atık pil toplama kampanyasında her gün bir önceki günden 4 pil fazla toplanmıştır. Bu okulda ilk gün 9 pil toplandığına göre kampanyanın onuncu günü sonunda toplanan toplam pil sayısını bulunuz.



6. Ceren, yaz tatilinde ilk gün 7 matematik problemi çözüyor ve her gün çözdüğü problem sayısını bir önceki güne göre 4 artırıyor. Buna göre Ceren'in bir ayda çözdüğü toplam problem sayısını bulunuz.

2. BÖLÜM BÖLÜNEBİLME

Tam Sayılarda Bölünebilme Kuralları



Olimpiyat oyunlarının açılış töreninde oyunlara katılan bütün sporcular olimpiyat yemini eder. Bu yemini, organizatör ülkenin ünlü bir sporcusu tüm sporcular adına söyler. Yemin şöyledir:

“Olimpiyat oyunlarında ülkemin şerefi ve sporun zaferi için kurallara uyarak dürüst yarışacağımıza ve gerçek sportmenlik ruhu içinde mücadele edeceğimize ant içeriz.”

1896 yılından bu yana gerçekleştirilen modern olimpiyat oyunları bundan sonra da her 4 yılda bir (savaş nedeniyle 1916, 1940 ve 1944 yılları hariç) yapılmıştır.

Acaba 2018 yılında olimpiyat oyunları yapılacak mıdır?

Olimpiyatların hangi yıllarda yapılacağını nasıl bulabiliriz?

http://sgm.gsb.gov.tr/Sayfalar/127/163/OlimpiyatSembolleri

HATIRLAYALIM

a ve b birer tam sayı ve $b \neq 0$ olmak üzere $a = b \cdot c$ olacak biçimde bir c tam sayısı varsa a sayısı b ile (kalansız, tam) bölünür ve bölüm c dir denir. Bu durum aşağıdaki biçimlerde gösterilir.

$$a : b = c \quad \text{veya} \quad \begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} -\ \vdots & c \\ \hline 0 & \end{array}$$

a bir tam sayı ve b bir pozitif tam sayı olmak üzere $a = b \cdot c$ olacak biçimde bir c tam sayısı yoksa $0 < r < b$ olmak üzere,

$$a = b \cdot d + r \quad \text{veya} \quad \begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} -\ \vdots & d \\ \hline r & \end{array}$$

(a → bölünen, b → bölen, d → bölüm, r → kalan)

olacak biçimde d ve r tam sayıları vardır. Yukarıdaki bölme işleminde a sayısına bölünen, b sayısına bölen, d sayısına bölüm ve r sayısına kalan adı verilir.



Doğal sayılar için verilecek olan bölünebilme kuralları tam sayılar için de geçerlidir.



ÖRNEK

34 sayısının 8 ile bölümünden elde edilen kalanı bulalım.

Çözüm

$34 = 8 \cdot 4 + 2$ biçiminde yazılabilir. Buna göre 34 sayısının 8 ile bölümünden elde edilen kalan 2 dir.

ÖRNEK

a tam sayısının 14 ile bölümünden elde edilen bölüm 6 ve kalan 3 olduğuna göre a sayısını bulalım.

Çözüm

Verilen bilgilere göre aşağıdaki bölme işlemini yazabiliriz.

$$\begin{array}{r|l} a & 14 \\ \cline{2-2} -\quad \vdots & 6 \\ \hline 3 & \end{array}$$

O hâlde $a = 6 \cdot 14 + 3 = 84 + 3 = 87$ bulunur.

2 ile Bölünebilme

Birler basamağındaki rakamı çift olan doğal sayılar 2 ile bölünür.

ÖRNEK

2 ile bölünebilen üç basamaklı, dört basamaklı ve beş basamaklı doğal sayılar yazalım.

Çözüm

566, 3074 ve 70 852 sayılarının birler basamağındaki rakamlar sırasıyla 6, 4 ve 2 dir. Bu rakamlar çift olduğundan verilen sayılar 2 ile bölünür.

ÖRNEK

Dört basamaklı 716A doğal sayısı 2 ile bölünebildiğine göre A yerine yazılabilecek rakamların toplamını bulalım.

Çözüm

A yerine yazılabilecek rakamlar 0, 2, 4, 6 ve 8'dir. Bu sayıların toplamı $0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20$'dir.

ÖRNEK

Rakamları birbirinden farklı beş basamaklı 68A7B doğal sayısı 2 ile bölünebildiğine göre $A + B$ toplamının alabileceği en büyük değeri bulalım.

Çözüm

$A + B$ toplamının alabileceği en büyük değeri bulmak için A ve B rakamlarının alabileceği en büyük değerleri bulmalıyız. Sayının rakamlarıyla ilgili herhangi bir koşul olmasaydı B'nin alabileceği en büyük değer 8 olurdu. Ancak sorunun kökünde sayının rakamlarının birbirinden farklı olduğu belirtildiğinden B rakamı 8 olamaz. Aynı nedenle B rakamı 6 da olamaz. Öyleyse A ve B rakamlarının alabileceği en büyük değerler sırasıyla 9 ve 4 olur.

Buna göre $A + B$ toplamının alabileceği en büyük değer $9 + 4 = 13$'tür.

ÖRNEK

Rakamları birbirinden farklı dört basamaklı A39B doğal sayısı 2 ile bölünebildiğine göre $A + B$ toplamının alabileceği en küçük ve en büyük değerleri bulalım.

Çözüm

B'nin alabileceği en küçük değer 0 ve A'nın alabileceği en küçük değer 1'dir. Öyleyse $A + B$ toplamının alabileceği en küçük değer $1 + 0 = 1$'dir. B'nin alabileceği en büyük değer 8 ve A'nın alabileceği en büyük değer 7'dir. Öyleyse $A + B$ toplamının alabileceği en büyük değer $8 + 7 = 15$'tir.

3 ile Bölünebilme

- Bir doğal sayının rakamları toplamı 3 ile bölünüyorsa bu doğal sayı da 3 ile bölünür.
- Bir doğal sayının rakamları toplamının 3 ile bölümünden elde edilen kalan, bu sayının 3 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

ÖRNEK

Altı basamaklı 205 140 doğal sayısının 3 ile bölünüp bölünmediğini belirleyelim.

Çözüm

$2 + 0 + 5 + 1 + 4 + 0 = 12$ ve 12 sayısı 3 ile bölündüğünden verilen sayı 3 ile bölünür.

ÖRNEK

Dört basamaklı 5A36 doğal sayısı 3 ile bölünebildiğine göre A yerine gelebilecek rakamları bulalım.

Çözüm

Verilen sayının rakamları toplamını bulalım.

$$5 + A + 3 + 6 = 14 + A$$

A yerine 1, 4 ve 7 rakamı geldiğinde $14 + A$ sayısı 3 ile bölünebildiğinden 5A36 sayısı da 3 ile bölünür.

ÖRNEK

On iki basamaklı 442223333555 doğal sayısının 3 ile bölümünden elde edilen kalanı bulalım.

Çözüm

Verilen sayının rakamları toplamını bulalım.

$$4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 5 + 5 + 5 = 41$$

41 sayısının 3 ile bölümünden kalan 2 olduğu için verilen on iki basamaklı sayının da 3 ile bölümünden kalan 2'dir.

4 ile Bölünebilme

- Bir doğal sayının son iki rakamının oluşturduğu iki basamaklı sayı 4 ile bölünüyorsa bu doğal sayı da 4 ile bölünür.
- Bir doğal sayının son iki basamağının oluşturduğu iki basamaklı sayının 4 ile bölümünden elde edilen kalan, bu sayının 4 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

ÖRNEK

328, 50 996, 302 704 sayılarının 4 ile bölünüp bölünmediğini belirleyelim.

Çözüm

Verilen sayıların son iki rakamını oluşturduğu iki basamaklı 28, 96 ve 04 sayıları 4 ile bölündüğünden verilen sayılar da 4 ile bölünür.

ÖRNEK

Beş basamaklı 53 13A doğal sayısı 4 ile bölünebildiğine göre A yerine yazılabilecek rakamları bulalım.

Çözüm

Verilen sayının 4 ile bölünebilmesi için 3A sayısının 4 ile bölünmesi gerekir. Bunun için A yerine 2 ve 6 rakamlarından biri gelmelidir.

ÖRNEK

3 ile bölünebilen üç basamaklı 3A2 doğal sayısının 4 ile bölümünden kalan 2 olduğuna göre A rakamını bulalım.

Çözüm

3A2 doğal sayısının 3 ile bölünebilmesi için rakamları toplamının 3 ile bölünebilmesi gerekir.

Sayının rakamları toplamını bulalım.

$$3 + A + 2 = 5 + A$$

$5 + A$ toplamının 3 ile bölünebilmesi için A yerine 1, 4 ve 7 rakamları gelebilir.

A yerine 1 rakamı gelirse sayımız 312 olur. 312 sayısının son iki basamağı (12) 4 ile bölünür.

A yerine 4 rakamı gelirse sayımız 342 olur. 342 sayısının son iki basamağı (42) 4 ile bölündüğünde kalan 2 dir.

A yerine 7 rakamı gelirse sayımız 372 olur. 372 sayısının son iki basamağı (72) 4 ile bölünür.

O hâlde A rakamı 4 olmalıdır.

ÖRNEK

Rakamları birbirinden farklı beş basamaklı 95 1A3 doğal sayısının 4 ile bölümünden elde edilen kalan 1 dir. Buna göre A yerine gelecek rakamı bulalım.

Çözüm

95 1A3 ve A3 sayılarının 4 ile bölümünden elde edilen kalanlar eşit olduğundan A3 sayısının da 4 ile bölümünden kalan 1 dir. Öyleyse A3 sayısının 1 eksiği yani A2 sayısı 4 ile bölünür. Buna göre A yerine 1, 3, 5, 7 ve 9 rakamları gelebilir. 95 1A3 sayısının rakamları birbirinden farklı olduğundan $A = 7$ olmalıdır.

5 ile Bölünebilme

- Bir doğal sayının birler basamağındaki rakam 0 ya da 5 ise bu sayı 5 ile bölünür.
- Bir doğal sayının birler basamağındaki rakamın 5 ile bölümünden elde edilen kalan, bu sayının 5 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

ÖRNEK

Aşağıda verilen sayıların 5 ile bölünüp bölünmediğini belirleyelim.

a. 785 **b.** 3920 **c.** 44 382

Çözüm

a ve b seçeneklerinde verilen sayıların birler basamaklarındaki rakamlar sırasıyla 5 ve 0 olduğundan bu sayılar 5 ile bölünür. c seçeneğinde verilen sayının birler basamağındaki rakam (2 rakamı) 0 ya da 5 olmadığından bu sayı 5 ile bölünmez.

ÖRNEK

438A sayısının 5 ile bölümünden elde edilen kalanın 3 olması için A yerine yazılabilecek rakamları bulalım.

Çözüm

A rakamı 3 ya da 8 olursa 438A sayısının 5 ile bölümünden elde edilen kalan 3 olur.

ÖRNEK

4 ile bölünen beş basamaklı 78 45A doğal sayısının 5 ile bölümünden elde edilen kalan 1 dir. Buna göre A yerine gelecek rakamı bulalım.

Çözüm

Verilen sayının 5 ile bölümünden elde edilen kalan 1 olduğundan A yerine 1 ve 6 rakamları gelebilir. 78 45A sayısının 4 ile bölünebilmesi için 5A sayısının 4 ile bölünebilmesi gerekir. 51 sayısı 4 ile bölünmediğinden $A = 6$ olmalıdır.

8 ile Bölünebilme

- Bir doğal sayının son üç basamağının oluşturduğu üç basamaklı sayı 8 ile bölünüyorsa bu doğal sayı da 8 ile bölünür.
- Bir doğal sayının son üç basamağının oluşturduğu üç basamaklı sayının 8 ile bölümünden elde edilen kalan, bu sayının 8 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

 **ÖRNEK**

Dört basamaklı 36A2 doğal sayısı 3 ve 8 ile bölünebilmektedir. Buna göre A yerine gelecek rakamı bulalım.

Çözüm

36A2 sayısının 8 ile bölünebilmesi için 6A2 sayısının 8 ile bölünmesi gerekir. 600 sayısı 8 ile bölündüğünden 6A2 sayısının 8 ile bölünebilmesi için A2 sayısının 8 ile bölünmesi gerekir. Öyleyse A yerine 3 ve 7 rakamları gelebilir.

3632 sayısının rakamlarının toplamını bulalım.

$$3+6+3+2=14$$

14 sayısı 3 ile bölünmediğinden 3632 sayısı da 3 ile bölünmez.

3672 sayısının rakamlarının toplamını bulalım.

$$3+6+7+2=18$$

18 sayısı 3 ile bölündüğünden 3672 sayısı da 3 ile bölünür.

Öyleyse $A=7$ olmalıdır.

 **ÖRNEK**

5 ile bölünebilen, rakamları birbirinden farklı beş basamaklı 19 6AB doğal sayısının 8 ile bölümünden elde edilen kalan 2 dir. Buna göre $A+B$ toplamını bulalım.

Çözüm

19 6AB sayısının 5 ile bölünebilmesi için B yerine 0 ya da 5 rakamı gelmelidir. 19 6A5 sayısı tek olduğundan bu sayının bir çift sayıyla örneğin 8 ile bölümünden elde edilen kalan tektir. Öyleyse B yerine 5 rakamı gelemez, $B=0$ dır.

19 6A0 ve 6A0 sayılarının 8 ile bölümünden elde edilen kalanlar eşit olduğundan 6A0 sayısının 8 ile bölümünden elde edilen kalan 2 dir.

600, 640 ve 680 sayıları 8 ile bölünebildiğinden 610, 650 ve 690 sayılarının 8 ile bölümünden elde edilen kalanlar 2 dir.

Öyleyse A yerine 1, 5 ve 9 rakamları gelebilir.

19 6A0 sayısının rakamlarının birbirinden farklı olduğu dikkate alınırsa A yerine 1 ve 9 rakamları gelemez, $A=5$ tir.

O hâlde $A+B=5+0=5$ bulunur.

9 ile Bölünebilme

- Rakamları toplamı 9 ile bölünebilen doğal sayılar 9 ile bölünür.
- Bir doğal sayının rakamları toplamının 9 ile bölümünden elde edilen kalan, bu sayının 9 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

ÖRNEK

Altı basamaklı 8A7 B25 doğal sayısı 9 ile bölünebilmektedir. Buna göre $A+B$ toplamının alabileceği en büyük değeri bulalım.

Çözüm

Sayının rakamlarının toplamını bulalım.

$$8+A+7+B+2+5=22+A+B$$

A ve B birer rakam olmak üzere, $22+A+B$ sayısının 9 ile bölündüğü göz önüne alındığında $A+B$ toplamı 5 ya da 14 olabilir.

O hâlde $A+B$ toplamının alabileceği en büyük değer 14 tür.

ÖRNEK

8 ile bölünebilen, rakamları birbirinden farklı dört basamaklı A2B4 doğal sayısının 9 ile bölümünden kalan 3 tür. Buna göre $A+B$ toplamını bulalım.

Çözüm

A2B4 sayısı 8 ile bölünebildiğinden 2B4 sayısı da 8 ile bölünür. Diğer taraftan 200 sayısı 8 ile bölünebildiğinden B4 sayısı da 8 ile bölünür.

8 in birler basamağı 4 olan iki basamaklı katları 24 ve 64 tür. Öyleyse B yerine 2 ya da 6 rakamı gelebilir. A2B4 sayısının rakamları birbirinden farklı olduğundan B yerine 2 rakamı gelemez, $B=6$ dır.

A264 sayısının 9 ile bölümünden elde edilen kalan 3 olduğundan bu sayının rakamları toplamı olan $12+A$ sayısının da 9 ile bölümünden elde edilen kalan 3 tür. Öyleyse A yerine 0 ya da 9 rakamı gelebilir. Verilen sayının 4 basamaklı olduğu dikkate alındığında A yerine 0 rakamı gelemez, $A=9$ dur.

O hâlde $A+B=9+6=15$ bulunur.

SIRA SİZDE

9 ile bölünebilen her sayı 3 ile de bölünür mü? 3 ile bölünebilen her sayı 9 ile de bölünür mü? Neden?

10 ile Bölünebilme

- Bir doğal sayının birler basamağındaki rakam 0 ise bu sayı 10 ile bölünür.
- Bir doğal sayının birler basamağındaki rakam, bu sayının 10 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

ÖRNEK

477, 5260, 67 284 sayılarının 10 ile bölümünden elde edilen kalanları bulalım.

Çözüm

Bir doğal sayının birler basamağındaki rakam, bu sayının 10 ile bölümünden elde edilen kalana eşit olduğundan

477 sayısının 10 ile bölümünden elde edilen kalan 7,

5260 sayısının 10 ile bölümünden elde edilen kalan 0,

67 284 sayısının 10 ile bölümünden elde edilen kalan 4 tür.

ÖRNEK

Rakamları birbirinden farklı dört basamaklı 25AB doğal sayısı 8 ve 10 ile bölünebilmektedir. Buna göre $A+B$ toplamını bulalım.

Çözüm

25AB sayısı 10 ile bölünebildiğinden B yerine 0 rakamı gelmelidir. Öyleyse 25A0 sayısının 8 ile bölünebilmesi için A yerine gelecek rakamı belirleyelim.

5A0 sayısının 8 ile bölünebilmesi için A yerine 2 ya da 6 rakamı gelmelidir. 25AB sayısının rakamları birbirinden farklı olduğundan A yerine 2 rakamı gelemez, $A=6$ dır.

O hâlde $A+B=6+0=6$ bulunur.

ÖRNEK

Beş basamaklı A2 36B doğal sayısının 10 ve 9 ile bölümünden elde edilen kalanlar sırasıyla 5 ve 4 tür. Buna göre $A+B$ toplamını bulalım.

Çözüm

A2 36B sayısının 10 ile bölümünden elde edilen kalan 5 olduğundan B yerine 5 rakamı gelmelidir.

A2 365 sayısının rakamlarının toplamını bulalım.

$$A+2+3+6+5=16+A$$

A bir rakam olmak üzere, $16+A$ toplamının 9 ile bölümünden elde edilen kalanın 4 olması için $16+A$ sayısı 22, A rakamı da 6 olmalıdır.

O hâlde $A+B=6+5=11$ bulunur.

11 ile Bölünebilme

Bir doğal sayının 11 ile bölümünden elde edilen kalanı bulmak için sayının basamaklarındaki rakamlar sağdan sola doğru $+, -, +, -, ...$ biçiminde işaretlenir ve yeni işaretleriyle tüm rakamlar toplanır. Bu toplamın 11 ile bölümünden elde edilen kalan, verilen sayının 11 ile bölümünden elde edilen kalana eşit olur.

ÖRNEK

248 713 sayısının 11 ile bölümünden elde edilen kalanı bulalım.

Çözüm

248 713 sayısının basamaklarındaki rakamları sağdan sola doğru aşağıdaki gibi işaretleyelim.

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 8 & 7 & 1 & 3 \\ - & + & - & + & - & + \end{array}$$

Sayının rakamlarını işaretleriyle toplayalım.

$$3 - 1 + 7 - 8 + 4 - 2 = 3$$

3 sayısının 11 ile bölümünden elde edilen kalan 3 olduğundan 248 713 sayısının da 11 ile bölümünden elde edilen kalan 3 tür.

ÖRNEK

Beş basamaklı 3A 423 doğal sayısının 11 ile bölünebilmesi için A yerine gelecek rakamı bulalım.

Çözüm

3A 423 sayısının basamaklarındaki rakamları sağdan sola doğru aşağıdaki gibi işaretleyelim.

$$\begin{array}{ccccc} 3 & A & 4 & 2 & 3 \\ + & - & + & - & + \end{array}$$

Sayının rakamlarını işaretleriyle toplayalım.

$$3 - 2 + 4 - A + 3 = 8 - A$$

A bir rakam olmak üzere, $8 - A$ sayısının 11 ile bölünebilmesi için $8 - A = 0$ ve böylece $A = 8$ olmalıdır. Bu durumda 38 423 sayısı 11 ile bölünür.

O hâlde A yerine 8 rakamı gelmelidir.

ÖRNEK

Dört basamaklı 81A4 doğal sayısının 11 ile bölümünden elde edilen kalan 1 dir. Buna göre A yerine gelecek rakamı bulalım.

Çözüm

81A4 sayısının rakamlarını işaretleyelim.

$$\begin{array}{cccc} 8 & 1 & A & 4 \\ - & + & - & + \end{array}$$

Sayının rakamlarını işaretleriyle toplayalım.

$$4 - A + 1 - 8 = -A - 3$$

A bir rakam olmak üzere, $-A - 3$ sayısının 11 ile bölümünden elde edilen kalanın 1 olması için $-A - 3 = -10$ ve böylece $A = 7$ olmalıdır. Bu durumda 8174 sayısının 11 ile bölümünden elde edilen kalan 1 dir.

O hâlde A yerine 7 rakamı gelmelidir.

Aralarında Asal Olma

BİLGİ

a tam sayısını bölen pozitif tam sayıların kümesi A ve b tam sayısını bölen pozitif tam sayıların kümesi B olsun. A ve B kümelerinin 1 den başka ortak elemanı yoksa "a ve b tam sayıları aralarında asaldır." denir. Bu kural ikiden fazla sayı için de geçerlidir.

 **ÖRNEK**

a. 6 ve 35

b. 14 ve 15

c. 18 ve 21

sayılarının aralarında asal olup olmadıklarını gösterelim.

Çözüm

a. 6 nın bölenleri kümesi $A = \{1, 2, 3, 6\}$
35 in bölenleri kümesi $B = \{1, 5, 7, 35\}$ $\Rightarrow A \cap B = \{1\} \Rightarrow$ 6 ve 35 sayıları aralarında asaldır.

b. 14 ün bölenleri kümesi $C = \{1, 2, 7, 14\}$
15 in bölenleri kümesi $D = \{1, 3, 5, 15\}$ $\Rightarrow C \cap D = \{1\} \Rightarrow$ 14 ve 15 sayıları aralarında asaldır.

c. 18 in bölenleri kümesi $E = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
21 in bölenleri kümesi $F = \{1, 3, 7, 21\}$ $\Rightarrow E \cap F = \{1, 3\} \Rightarrow$ 18 ve 21 sayıları aralarında asal değildir.

Aralarında Asal İki Sayının Çarpımı ile Bölünebilme

BİLGİ

a ve b aralarında asal iki tam sayı ise a ve b ile bölünebilen bir doğal sayı $a \cdot b$ çarpımı ile de bölünür.

6, 12, 15 ve 18 ile Bölünebilme

- 2 ve 3 sayıları aralarında asaldır. Öyleyse 2 ve 3 ile bölünebilen bir doğal sayı $2 \cdot 3 = 6$ ile de bölünür.
- 3 ve 4 sayıları aralarında asaldır. Öyleyse 3 ve 4 ile bölünebilen bir doğal sayı $3 \cdot 4 = 12$ ile de bölünür.
- 3 ve 5 sayıları aralarında asaldır. Öyleyse 3 ve 5 ile bölünebilen bir doğal sayı $3 \cdot 5 = 15$ ile de bölünür.
- 2 ve 9 sayıları aralarında asaldır. Öyleyse 2 ve 9 ile bölünebilen bir doğal sayı $2 \cdot 9 = 18$ ile de bölünür.

ÖRNEK

126 sayısının 6 ile bölündüğünü gösterelim.

Çözüm

126 sayısının birler basamağındaki rakam (6) çift olduğundan 126 sayısı 2 ile bölünür.

126 sayısının rakamları toplamı $1+2+6=9$ dur. 9 sayısı 3 ile bölünebildiğinden 126 sayısı da 3 ile bölünür.

126 sayısı 2 ve 3 ile bölünebildiğinden 6 ile de bölünür.

ÖRNEK

7314 sayısı 12 ile bölünebilir mi? Araştıralım.

Çözüm

7314 sayısının rakamları toplamı $7+3+1+4=15$ tir. 15 sayısı 3 ile bölünebildiğinden 7314 sayısı da 3 ile bölünür.

7314 sayısının son iki basamağının oluşturduğu 14 sayısı 4 ile bölünmediğinden 7314 sayısı da 4 ile bölünmez. 4 ile bölünmeyen bir sayı 12 ile de bölünmez.

O hâlde 7314 sayısı 12 ile bölünmez.

ÖRNEK

Beş basamaklı 54 27A sayısının 15 ile bölünebilmesi için A yerine gelecek rakamı bulalım.

Çözüm

Verilen sayı 3 ve 5 ile bölünürse 15 ile de bölünür.

54 27A sayısının 5 ile bölünebilmesi için A yerine 0 ya da 5 rakamı gelmelidir.

54 275 sayısının rakamları toplamı olan 23 sayısı 3 ile bölünmez. Öyleyse 54 275 sayısı 3 ile bölünmediğinden 15 ile de bölünmez.

Diğer taraftan 54 270 sayısının rakamları toplamı olan 18 sayısı 3 ile bölünür. Öyleyse 54 270 sayısı da 3 ile bölünür.

O hâlde A yerine 0 rakamı gelmelidir.

SIRA SİZDE

- 12 ve 15 ile bölünebilen her doğal sayı $12 \cdot 15 = 180$ ile bölünebilir mi?
- 120, 360 ve 480 sayılarının 12 ve 15 ile bölünüp bölünmediğini belirleyiniz.
- 120, 360 ve 480 sayılarının 180 ile bölünüp bölünmediğini belirleyiniz.
- 4, 5 ve 9 ile bölünebilen bir doğal sayı 180 ile bölünebilir mi?

ÖRNEK

Aşağıda verilen sayıların 18 ile bölünüp bölünmediğini inceleyelim.

a. 73 425 **b.** 4384 **c.** 438 156

Çözüm

a. Verilen sayının birler basamağındaki rakam tek olduğundan sayı 2 ile bölünmez. 2 ile bölünmeyen bir sayı 18 ile de bölünmez.

b. Verilen sayının birler basamağındaki rakam çift olduğundan sayı 2 ile bölünür. 4384 sayısının rakamları toplamına eşit olan 19 sayısı 9 ile bölünemediğinden 4384 sayısı da 9 ile bölünmez. 4384 sayısı 9 ile bölünemediğinden 18 ile de bölünmez.

c. Verilen sayının birler basamağındaki rakam çift olduğundan sayı 2 ile bölünür. Verilen sayının rakamları toplamına eşit olan 27 sayısı 9 ile bölünebildiğinden bu sayı da 9 ile bölünür. 438 156 sayısı 2 ve 9 ile bölünebildiğinden 18 ile de bölünür.

ÖRNEK

4 ve 6 ile bölünebilen bir doğal sayı 24 ile bölünebilir mi? Araştıralım.

Çözüm

4 ve 6 ile bölünebilen en küçük doğal sayı 12 dir. 12 nin tek sayı katlarını ele alalım. 12, 36, 60, ... sayıları 4 ve 6 ile bölünebilirken 24 ile bölünmez. Bu durum verilen bilgilerle çelişmez, çünkü 4 ve 6 sayıları aralarında asal değildir. 3 ve 8 sayıları aralarında asal olmak üzere, $3 \cdot 8 = 24$ olduğundan 3 ve 8 ile bölünebilen bir doğal sayı 24 ile de bölünür.

SIRA SİZDE

Dört basamaklı 73AA doğal sayısı 36 ile bölünebildiğine göre A yerine gelecek rakamı bulunuz.

BULMACA

Ardışık üç doğal sayının çarpımı, bu sayıların toplamına bölünebiliyorsa bu üç sayı “güzel üçlü” olarak adlandırılıyor.

1. $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kümesinin elemanlarıyla kaç tane güzel üçlü elde edebiliriz? Bulunuz.
2. İki basamaklı doğal sayılardan oluşan ve toplamları en büyük olan güzel üçlüyü bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

1. 827 sayısının 13 ile bölümünden elde edilen bölüm ve kalanı bulunuz.

2. 35 ile 127 sayıları arasındaki 2 ile bölünebilen doğal sayıların sayısını bulunuz.

3. 2 ile bölünebilen fakat 3 ile bölünemeyen iki, üç ve dört basamaklı birer doğal sayı yazınız.

4. Dört basamaklı 7A2B doğal sayısı 2 ve 3 ile bölünebilmektedir. Buna göre $A + B$ toplamının alabileceği en küçük değeri bulunuz.

5. Beş basamaklı A7 3A2 doğal sayısının 3 ile bölümünden elde edilen kalan 2 dir. Buna göre A yerine gelebilecek rakamların toplamını bulunuz.

6. 3 ile bölünebilen üç basamaklı 97A doğal sayısı 2 ile bölünememektedir. Buna göre A yerine gelecek rakamı bulunuz.

7. Üç basamaklı 94A doğal sayısı 3 ve 4 ile bölünebilmektedir. Buna göre A yerine gelecek rakamı bulunuz.

8. Dört basamaklı 67A2 doğal sayısının 3 ve 4 ile bölümünden elde edilen kalanlar sırasıyla 1 ve 2 dir. Buna göre A yerine gelebilecek rakamı bulunuz.

9. 4 ile bölünebilen beş basamaklı 24 38A doğal sayısının 5 ile bölümünden elde edilen kalan 3 tür. Buna göre A yerine gelebilecek rakamı bulunuz.

10. 5 ile bölünebilen fakat 3 ile bölünemeyen iki basamaklı doğal sayıları yazınız.

11. 5 ile bölünebilen üç basamaklı 3AA doğal sayısı 2 ile bölünememektedir. Bu doğal sayının 3 ile bölümünden elde edilen kalanı bulunuz.

12. Üç basamaklı 71A doğal sayısı 8 ile bölünebilmektedir. Bu doğal sayının 3 ile bölümünden elde edilen kalanı bulunuz.

13. Altı basamaklı 674 2A0 doğal sayısının 9 ile bölünebilmesi için A yerine gelecek rakamı bulunuz.

14. Altı basamaklı 978 4A2 doğal sayısının 11 ile bölümünden elde edilen kalan 5 tir. Buna göre A yerine gelecek rakamı bulunuz.

15. 6 ve 8 ile bölünebilen fakat 48 ile bölünemeyen iki basamaklı en büyük doğal sayıyı bulunuz.

Bir Tam Sayının Pozitif Tam Sayı Bölenleri

Bir tarladan her birinin alanı $24\ m^2$ olan dikdörtgen biçiminde hobi bahçeleri oluşturulacaktır. Kenar uzunlukları (metre türünden) birer tam sayı olmak üzere kaç farklı biçimde bahçe oluşturulabileceğini bulalım.

Bahçenin bir kenarının uzunluğu 1 m olursa diğer kenarının uzunluğu 24 m olur.

Bahçenin bir kenarının uzunluğu 2 m olursa diğer kenarının uzunluğu 12 m olur.

Bahçenin bir kenarının uzunluğu 3 m olursa diğer kenarının uzunluğu 8 m olur.

Bahçenin bir kenarının uzunluğu 4 m olursa diğer kenarının uzunluğu 6 m olur.

O hâlde oluşturulacak bahçeler aşağıdaki boyutlarda olabilir:

$$1 \times 24$$
$$2 \times 12$$
$$3 \times 8$$
$$4 \times 6$$

Başka bir deyişle bahçelerin kenar uzunlukları 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 ve 24 metre olabilir. Bu sayıların her biri 24 sayısını kalansız olarak böler.

HATIRLAYALIM

Her pozitif tam sayı, iki pozitif tam sayının çarpımı biçiminde yazılabilir. Bu sayılardan her birine, verilen sayının pozitif tam sayı böleni ya da çarpanı denir.



ÖRNEK

42 sayısının pozitif tam sayı bölenlerini bulalım.

Çözüm

Çarpımları 42 olan pozitif tam sayı çiftlerini yazalım.

$$\left.\begin{aligned} 42 &= 1 \cdot 42 \\ &= 2 \cdot 21 \\ &= 3 \cdot 14 \\ &= 6 \cdot 7 \end{aligned}\right\}$$ O hâlde 42 sayısının pozitif tam sayı bölenleri 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 ve 42 dir.



ÖRNEK

72 sayısının pozitif tam sayı bölenlerini bulalım.

Çözüm

Çarpımları 72 olan pozitif tam sayı çiftlerini yazalım.

$$\left.\begin{aligned} 72 &= 1 \cdot 72 \\ &= 2 \cdot 36 \\ &= 3 \cdot 24 \\ &= 4 \cdot 18 \\ &= 6 \cdot 12 \\ &= 8 \cdot 9 \end{aligned}\right\}$$ O hâlde 72 sayısının pozitif tam sayı bölenleri 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 ve 72 dir.

Asal Sayı

11 ve 29 sayılarının pozitif tam sayı bölenlerini bulmaya çalışalım. Bunun için çarpımları 11 ve 29 olan pozitif tam sayı çiftlerini yazalım.

$$11 = 1 \cdot 11$$

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ve 10 sayılarına tam bölünmediği için 11 sayısının başka pozitif tam sayı böleni yoktur. O hâlde 11 sayısının çarpanları 1 ve kendisidir.

$$29 = 1 \cdot 29$$

Benzer biçimde 29 sayısının da 1 ve kendisinden başka pozitif tam sayı böleni olmadığını söyleyebiliriz.

HATIRLAYALIM

1 ve kendisinden başka pozitif tam sayı böleni olmayan 1 den büyük doğal sayılara asal sayı denir. Örneğin 2, 3, 5, 7, 11, 13 ve 17 birer asal sayıdır. 2 hariç bütün asal sayılar tek sayıdır.

60 sayısının asal çarpanlarını bulalım. Kullandığımız yöntemi açıklayalım.

Açıklayacağımız yönteme göre 60 sayısını aşağıdaki gibi çizginin sol tarafına yazalım. En küçük asal sayı olan 2 den başlayarak ve deneyerek 60 ı bölen asal sayıları bulmaya çalışalım.

60	2	2 sayısı 60 ı böler. Elde edilen bölümü yani 30 u sol tarafa 60 ın altına yazalım.
30	2	Elde edilen 30 sayısını bölen en küçük asal sayıyı bulmaya çalışalım. 2 sayısı 30 u böler. 30 un karşısına 2 yi yazalım. Elde edilen bölümü yani 15 i 30 un altına yazalım.
15	3	2 sayısı 15 i bölmez. 3 sayısı 15 i böler. 3 sayısını 15 in karşısına yazalım. Elde edilen bölümü yani 5 i 15 in altına yazalım.
5	5	5 i bölen en küçük asal sayı 5 tir. Bu nedenle 5 in karşısına 5 yazalım. 5 in altına 1 yazalım.
1		

O hâlde 60 sayısının asal çarpanları 2, 3 ve 5 tir. 60 sayısını asal çarpanlarına ayrılmış biçimde yazalım.

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

 **ÖRNEK**

204 sayısını asal çarpanlarına ayıralım.

Çözüm

204	2
102	2
51	3
17	17
1	

$204 = 2^2 \cdot 3 \cdot 17$

204 sayısının asal çarpanları 2, 3 ve 17 dir.

Bir Tam Sayının Pozitif Tam Sayı Bölenlerinin Sayısı

84 sayısının pozitif tam sayı bölenlerini bulmak için aşağıdaki gibi çarpımları 84 olan pozitif tam sayı çiftlerini yazalım.

$$\begin{aligned} 84 &= 1 \cdot 84 \\ &= 2 \cdot 42 \\ &= 3 \cdot 28 \\ &= 4 \cdot 21 \\ &= 6 \cdot 14 \\ &= 7 \cdot 12 \end{aligned}$$

84 ün pozitif tam sayı bölenleri 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42 ve 84 tür.

Buna göre 84 ün pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı 12 dir.

Acaba 84 ün pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını başka bir yolla bulabilir miyiz?

Önce 84 ü asal çarpanlarına ayıralım ve asal çarpanların çarpımı biçiminde yazalım.

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

84 ün asal çarpanlarının üslerini göz önüne alalım.

2^2 nin üssü 2 dir.

3^1 in üssü 1 dir.

7^1 in üssü 1 dir.

Elde ettiğimiz 2, 1, 1 sayılarının her birine 1 ekleyelim.

$$\begin{aligned} 2 + 1 &= 3 \\ 1 + 1 &= 2 \\ 1 + 1 &= 2 \end{aligned}$$

Bulduğumuz 3, 2 ve 2 sayılarının çarpımı, 84 sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını verir.

$$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$$

84 sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı 12 dir.

BİLGİ

Bir a pozitif tam sayısının asal çarpanlarına ayrılmış biçimi $a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{n_m}$ ise bu a sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

Pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı $= (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (n_m + 1)$

ÖRNEK

504 sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını bulalım.

Çözüm

Önce 504 ü asal çarpanlarına ayırarak asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazalım.

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ (7 nin üssünün 1 olduğunu hatırlayınız.)

504 ün pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned}\text{Bölenlerin sayısı} &= (3+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1)\\ &= 4\cdot 3\cdot 2\\ &= 24\end{aligned}$$

504 ün pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı 24 tür.

SIRA SİZDE

504 sayısının kendisinden farklı en büyük böleni kaçtır?

ÖRNEK

288 sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını bulalım.

Çözüm

Önce 288 i asal çarpanlarına ayırarak asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazalım.

288	2
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$288 = 2^5 \cdot 3^2$

288 in pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned}\text{Bölenlerin sayısı} &= (5+1)\cdot(2+1)\\ &= 6\cdot 3\\ &= 18\end{aligned}$$

288 in pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı 18 dir.

SIRA SİZDE

Yukarıdaki örnekten yararlanarak ve $288 \cdot 2 = 576$ olduğunu düşünerek 576 sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını bulunuz.

ÖRNEK

$3000...0$ sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı 98'dir. Buna göre bu sayıda kaç tane sıfır rakamı olduğunu bulalım.

Çözüm

Bu sayıdaki sıfırların sayısı n olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\begin{aligned} 3000...0 &= 3 \cdot 10^n \\ &= 3^1 \cdot 2^n \cdot 5^n \end{aligned}$$

Verilen sayının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı $(1+1)(n+1)(n+1)$ olur. Bu çarpımı 98 sayısına eşitleyip n değerini bulalım.

$$\begin{aligned} (1+1)(n+1)(n+1) &= 98 \\ 2(n+1)^2 &= 98 \\ (n+1)^2 &= 49 \\ |n+1| &= 7 \end{aligned}$$

$n > 0$ olduğundan $n = 6$ bulunur. Verilen sayıda 6 tane sıfır vardır.

SIRA SİZDE

Bir A doğal sayısının asal çarpanları 3 ve 7'dir. Bu sayının pozitif bölenlerinin sayısı 12 olduğuna göre $4 \cdot A$ sayısının pozitif bölenlerinin sayısını bulunuz.

BULMACA

Bir matematik öğretmeni şöyle bir tanım yapıyor:

Asal çarpanlarının toplamına bölünebilen doğal sayılara "asil sayı" denir. Örnek vermek gerekirse 60 bir asil sayıdır çünkü 60 sayısı asal çarpanları olan 2, 3 ve 5 sayılarının toplamı olan 10 sayısına bölünür.

1. 45 bir asil sayı mıdır? Açıklayınız.
2. İki basamaklı en büyük asil sayıyı bulunuz.
3. Asal çarpanları 2, 3 ve 5 olan üç basamaklı en küçük asil sayıyı bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki sayıların pozitif tam sayı bölenlerini bulunuz.

   a. 35 b. 44 c. 54

2. 40 ile 50 sayıları arasındaki asal sayıları yazınız.

3. Aşağıdaki sayıların asal çarpanlarını bulunuz.

   a. 96 b. 105 c. 120

4. Aşağıdaki sayıları asal çarpanlarına ayırınız. Verilen sayıları asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazınız.

   a. 66 b. 136 c. 264

5. 1152 sayısını asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazınız. Aynı sayının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını bulunuz.

6. Aşağıda asal çarpanlarının çarpımı biçiminde verilen sayıları ve bu sayıların pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını belirtiniz.

   a. $2^3 \cdot 3 \cdot 5$ b. $2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ c. $2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$

   ç. $2^5 \cdot 11$ d. 5^3 e. 7^2

7. Bir tam sayının tek sayıda pozitif tam sayı böleni olabilir mi? Açıklayınız.

8. Asal çarpanları aynı ve pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı eşit olan iki tam sayı eşit olmayabilir. Bu durumu belirten bir örnek bulunuz.

9. 12 tane pozitif tam sayı böleni olan iki basamaklı tam sayıları yazınız.

10. Asal çarpanları aynı olan iki tam sayıdan büyük olanının daha fazla sayıda pozitif tam sayı böleni olduğu söylenebilir mi? Açıklayınız.

1. ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. a bir tam sayı olmak üzere,

$$\frac{a+5}{a}$$

ifadesinin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 3 D) 4 E) 6

2. I. Her tam sayı bir doğal sayıdır.

II. Her tam sayı bir rasyonel sayıdır.

III. Her gerçek sayı bir rasyonel ya da irrasyonel sayıdır.

Yukarıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

A) Yalnız II B) I ve II C) I ve III D) II ve III E) I, II ve III

3. a bir pozitif rasyonel sayı olduğuna göre

I. $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ ise $a \in \mathbb{Q}$ dur.

II. $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ ise $\sqrt{a+1} \in \mathbb{Q}$ dur.

III. $\sqrt{a-1} \in \mathbb{Z}^+$ ise $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ dur.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve II E) II ve III

4. Sayı kümeleriyle ilgili aşağıda verilenlerden hangisi **yanlıştır**?

A) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ B) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ C) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ D) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}'$ E) $\mathbb{Q}' \subset \mathbb{R}$

5. $\sqrt{18}$ sayısı aşağıdaki sayılardan hangisiyle çarpılırsa bir tam sayı elde edilir?

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{4}$ C) $\sqrt{6}$ D) $\sqrt{8}$ E) $\sqrt{10}$

6. Aşağıdakilerden hangisi bir rasyonel sayıdır?

A) $\sqrt{0,09}$ B) $\sqrt{0,75}$ C) $\sqrt{0,8}$ D) $\sqrt{2,5}$ E) $\sqrt{1,5}$

7. $\frac{a-4}{a}$ ifadesi bir tam sayıya eşit olduğuna göre a sayısı aşağıdakilerden hangisi **olamaz**?

A) $\frac{-4}{3}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{4}{6}$ D) $\frac{8}{6}$ E) $\frac{8}{9}$

8. Aşağıdaki rasyonel sayılardan hangisi $\sqrt{5}$ ile $\sqrt{10}$ sayıları arasında **değildir**?

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{7}{3}$ C) $\frac{8}{3}$ D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{11}{4}$

9. Aşağıdakilerden hangisi -4 ile -3 sayıları arasında olan bir rasyonel sayıdır?

A) $\frac{-9}{2}$ B) $\frac{-5}{2}$ C) $\frac{-10}{3}$ D) $\frac{-13}{3}$ E) $\frac{-11}{4}$

10. $\frac{53}{12}$ ile $\frac{16}{3}$ sayıları arasında olan tam sayı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

11. 30 480 sayısının çözümlenmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1$ B) $3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^0$

C) $3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^1$ D) $3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^0$

E) $3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$

12. AA ve AB iki basamaklı doğal sayılar olmak üzere

$$AA + AB = 129$$

olduğuna göre $A + B$ toplamı kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

13. Üç basamaklı ABC ve iki basamaklı AB doğal sayılarının toplamı 357 dir. Buna göre $A + B + C$ toplamı kaçtır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

14. Üç basamaklı 8AB doğal sayısı, iki basamaklı AB doğal sayısının 26 katına eşittir. Buna göre $A + B$ toplamı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

15. A ve B rakamlarından oluşan iki basamaklı AA ve AB doğal sayıları veriliyor. Bu doğal sayıların toplamı aşağıdakilerden hangisi **olamaz**?

A) 25 B) 43 C) 67 D) 110 E) 123

16. 9 ile başlayan altışar artarak devam eden ve 87 sayısıyla sonlanan doğal sayılar veriliyor. Buna göre kaç tane doğal sayı verilmiştir?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

17. 8 ile başlayan yedişer artarak devam eden ve a sayısıyla sonlanan 15 doğal sayı veriliyor.

$$8, 15, 22, ..., a - 7, a$$

Bu doğal sayıların en büyüğü yani a kaçtır?

A) 106 B) 109 C) 113 D) 116 E) 120

18. 6, 15, 24, ..., 51, 60 doğal sayıları veriliyor. Bu sayıların toplamı kaçtır?

A) 215 B) 219 C) 223 D) 231 E) 237

19. 5 ile başlayan dörder artarak devam eden 21 doğal sayı veriliyor. Bu sayıların toplamı kaçtır?

A) 915 B) 925 C) 930 D) 940 E) 945

20. Bir tiyatro salonunda art arda dizilmiş 10 sıra koltuk vardır. Salonun en ön sırasında 8 koltuk vardır. Diğer sıralardaki koltuk sayısı bir ön sıradaki koltuk sayısından 3 fazladır. Buna göre tiyatro salonunda kaç koltuk vardır?

A) 215 B) 218 C) 221 D) 224 E) 225

21. Ayşe bir kitabın ilk gün 5 sayfasını, 6. gün 20 sayfasını okuyarak kitabı 11 günde bitirmiştir. Ayşe'nin kitabı okumaya başladığı günden itibaren okuduğu sayfa sayısı her gün eşit miktarda artmıştır. Buna göre Ayşe'nin okuduğu kitap kaç sayfadır?

A) 220 B) 230 C) 240 D) 250 E) 260

22. 907 sayısının 17 ile bölümünden elde edilen bölüm ve kalanın toplamı kaçtır?

A) 48 B) 51 C) 54 D) 56 E) 59

23. 4 ile bölünebilen 3 ile bölünemeyen iki basamaklı kaç doğal sayı vardır?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

24. Üç basamaklı A4B doğal sayısı 4 ile bölünürken 6 ile bölünmemektedir. Buna göre $A+B$ toplamının alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

25. 18 ile bölünebilen beş basamaklı A5 74B doğal sayısının 5 ile bölümünden elde edilen kalan 3 tür. Buna göre $A+B$ toplamı kaçtır?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

26. Dört basamaklı rakamları farklı 74AB doğal sayısının 8 ile bölümünden elde edilen kalan 3 tür. Bu doğal sayı 5 ile bölünebildiğine göre $A+B$ toplamı kaçtır?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 11 E) 12

27. Aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

A) 4 ve 6 ile bölünebilen her doğal sayı 24 ile de bölünür.

B) 4 ve 9 ile bölünebilen her doğal sayı 36 ile de bölünür.

C) 6 ve 9 ile bölünebilen her doğal sayı 54 ile de bölünür.

D) 6 ve 15 ile bölünebilen her doğal sayı 90 ile de bölünür.

E) 8 ve 12 ile bölünebilen her doğal sayı 96 ile de bölünür.

28. $2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$ sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı kaçtır?

A) 12 B) 15 C) 18 D) 24 E) 30

29. 50 ile 70 sayıları arasında kaç tane asal sayı vardır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

2. ÜNİTE

ÜÇGENLER



DİK ÜÇGEN

HAZIR MIYIZ?

1. Aşağıdaki sayıları $a\sqrt{b}$ biçiminde yazınız.

a. $\sqrt{45}$ **b.** $\sqrt{72}$ **c.** $\sqrt{108}$

2. Aşağıdaki sayıları $\sqrt{a}$ biçiminde yazınız.

a. $4\sqrt{2}$ **b.** $5\sqrt{3}$ **c.** $6\sqrt{5}$

3. Bir üçgenin kenarları üzerine kurulan karelerin alanları 16, 25 ve 60 birimkaredir. Bu üçgenin çevre uzunluğunu bulunuz.

4. Köşegen uzunluğu $2\sqrt{6}$ birim olan karenin çevre uzunluğunu ve alanını bulunuz.

5. Kenar uzunlukları $3\sqrt{2}$ ve $5\sqrt{2}$ birim olan 15 eş dikdörtgen yan yana ve alt alta getirilerek bir kare elde ediliyor. Elde edilen bu karenin köşegen uzunluğunu bulunuz.

6. Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan a pozitif tam sayılarını bulunuz.

a. $a^2 + (a+1)^2 = (a+2)^2$

b. $a^2 + (a+7)^2 = (a+8)^2$

c. $a^2 + (a+17)^2 = (a+18)^2$

7. Bir üçgenin kenarları üzerine kurulan karelerin alanları 16, 36 ve 52 birimkaredir. Bu üçgenin kenar uzunlukları küçükten büyüğe doğru a, b ve c ile gösterilirse a, b ve c sayıları arasında bir bağıntı yazınız.

8. Bir torbada 5 sarı, 8 beyaz ve 12 kırmızı top vardır. Bu torbadaki topların,

a. Sarı topların sayısının beyaz topların sayısına oranını bulunuz.

b. Beyaz topların sayısının kırmızı topların sayısına oranını bulunuz.

c. Kırmızı topların sayısının torbadaki tüm topların sayısına oranını bulunuz.

9. Bir dikdörtgenin kısa kenarının uzunluğunun uzun kenarın uzunluğuna oranı $\frac{3}{5}$ tir. Bu dikdörtgenin uzun kenarının uzunluğu 20 birim olduğuna göre kısa kenarının uzunluğunu bulunuz.

10. Bir ABC dik üçgeninde

$m(\widehat{BCD}) = 90°$

$m(\widehat{CAB}) = \alpha$

$|AB| = 6\sqrt{5}$ birim

$|BC| = 6$ birim

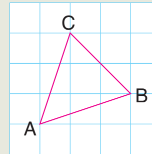
$|CA| = 12$ birim olduğuna göre,

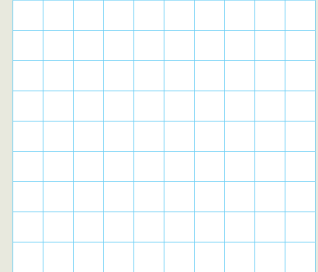
a. α açısının karşısındaki dik kenarın uzunluğunun hipotenüsün uzunluğuna oranını bulunuz.

b. α açısına komşu olan dik kenarın uzunluğunun hipotenüsün uzunluğuna oranını bulunuz.

c. α açısının karşısındaki dik kenarın uzunluğunun diğer dik kenarın uzunluğuna oranını bulunuz.

11.





Yukarıda verilen ABC üçgeninin $\frac{2}{1}$ oranında büyütülmüşünü yan tarafına çiziniz.

12. Arda ve Buket'in boyları sırasıyla 160 ve 150 cm'dir. Arda'nın gölgesinin uzunluğu 80 cm olduğu bir anda Buket'in gölgesinin uzunluğunun ne kadar olacağını tahmin ediniz.

DİK ÜÇGEN

Dik Üçgenlerle İlgili Problemler



Fransız mühendis Gustave Eiffel (Güztav Eyfel) tarafından tasarlanan Eyfel Kulesi, yüksekliği 301,5 metre olan, dört ayak üstünde yükselen, çelikten yapılmış bir anıttır. Yapımının tamamlandığı yıl olan 1889'dan 1930'a kadar kule, dünyanın en yüksek binası olarak kalmış ve bu özelliğini 1930'da New York'taki Chrysler (Kıraysler) binası (319 m) yapılana kadar korumuştur.

Üçgen bağlantıların yapılarda dayanıklılığı sağladığını mühendisler antik çağlardan beri çok iyi biliyorlardı. Nitekim üçgenler, Eyfel Kulesi'nde de yapının kalıcılığının bir garantisi olarak ortaya çıkar.

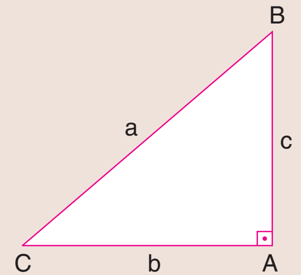
Denge ve sağlamlık bakımından geometrinin kullanıldığı en güzel örneklerden biri olan kule, metalden yapılmış parçaların oluşturduğu geometrik şekillerle ve özellikle dik üçgenlerin kendi kendini tekrarlayan biçimde yerleştirilmesiyle dikkat çeker.

Kulenin yapımında kullanılan metalin toplam ağırlığının 7500 ton olduğu düşünülürse kulenin zamanla bu ağırlığı taşıyamayıp çökeceği akla gelebilir. Ama tasarımında matematiğin ustaca kullanıldığı bu yapı, kendini tekrarlayan üçgenler sayesinde şaşırtıcı ölçüde dayanıklıdır.

HATIRLAYALIM

Dik Üçgen ve Pisagor Bağıntısı

Pisagor bağıntısına göre, "Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının kareleri toplamı, hipotenüsün uzunluğunun karesine eşittir.". Hipotenüs, dik açının karşısındaki kenardır. Dolayısıyla bir dik üçgende en uzun kenardır.



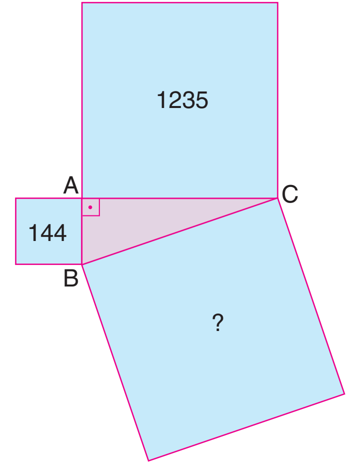
Şekildeki $\widehat{ABC}$ dik üçgeninde hipotenüsün uzunluğu a birim, dik kenarların uzunlukları b birim ve c birim olmak üzere Pisagor bağıntısı şöyle yazılır:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

ÖRNEK

Yandaki şekilde $m(\widehat{A}) = 90°$ dir. ABC dik üçgeninin [AB] kenarının üzerine kurulan karenin alanı 144 birimkare, [AC] kenarının üzerine kurulan karenin alanı 1235 birimkaredir.

Buna göre [BC] kenarının üzerine kurulan karenin alanı kaç birimkaredir? Bulalım.



Çözüm

Dik üçgende Pisagor bağıntısını yazalım.

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$$

Verilenleri bu bağıntıda yerlerine yazalım.

$$|BC|^2 = 144 + 1235$$
$$= 1379$$

[BC] kenarı üzerine kurulan karenin alanı 1379 birimkaredir.

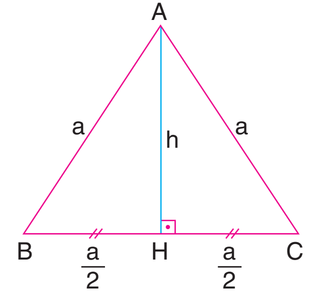
ÖRNEK

Bir kenar uzunluğu a birim olan bir eşkenar üçgenin yükseklik uzunluğunu a türünden bulalım.

Çözüm

$|AB| = |AC| = |BC| = a$ (Eşkenar üçgen tanımı)

$|BH| = |HC| = \frac{a}{2}$ (Eşkenar üçgende yükseklik aynı zamanda kenarortaydır.)



ABH dik üçgeninde,

$|AB|^2 = |BH|^2 + |AH|^2$ (Pisagor bağıntısı)

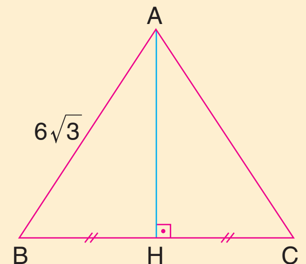
$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$

$$a^2 = \frac{a^2}{4} + h^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$\Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$ birim bulunur.

SIRA SİZDE

Bir ABC eşkenar üçgenin bir kenarının uzunluğu $6\sqrt{3}$ birim olduğuna göre bir yüksekliğinin uzunluğu kaç birimdir?



ÖRNEK

Televizyon almak için bir mağazaya gittiğinizde satış sorumlusu size kaç inç televizyon istediğinizi sorar. Aslında sizden öğrenmek istediği, televizyon ekranının köşegen uzunluğudur. İnç, bir uzunluk ölçüsü birimi olup 2,54 cm'ye eşittir.

Kenar uzunlukları cm türünden verilen yandaki televizyonun ekran boyutunun kaç inç olduğunu yaklaşık olarak hesaplayalım.



Çözüm

Pisagor bağıntısını kullanarak ekranın köşegen uzunluğunu (k) bulalım.

$$k^2 = 44^2 + 80^2 \Longrightarrow k^2 = 1936 + 6400$$
$$= 8336$$
$$k \approx 91 \text{ cm}$$

91 cm'yi inç türünden yazalım. $\dfrac{91}{2,54} \approx 36$

O hâlde televizyon yaklaşık olarak 36 inçtir.



İnç biriminin gösterimi ″ biçimindedir.
36 inç: 36″

ÖRNEK

Yandaki şekilde

$m(\widehat{ACD}) = 90°$

$m(\widehat{ABC}) = 90°$

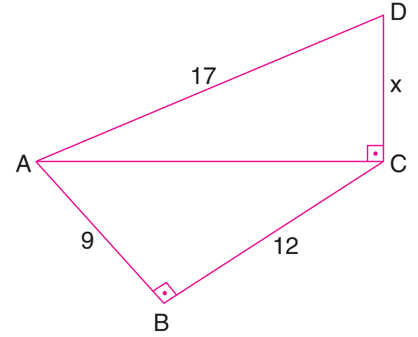
$|AB| = 9$ birim

$|BC| = 12$ birim

$|DA| = 17$ birim

$|CD| = x$

olduğuna göre x kaç birimdir? Bulalım.



Çözüm

ABC dik üçgeninde Pisagor bağıntısını yazalım ve $|AC|$ uzunluğunu hesaplayalım.

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 \Rightarrow |AC|^2 = 9^2 + 12^2$$
$$= 225 \Rightarrow |AC| = 15 \text{ birim}$$

ACD dik üçgeninde Pisagor bağıntısını yazalım ve $|CD| = x$ uzunluğunu hesaplayalım.

$$|AC|^2 + |CD|^2 = |DA|^2$$
$$15^2 + x^2 = 17^2 \Rightarrow x^2 = 289 - 225$$
$$= 64$$
$$x = 8$$

O hâlde $|CD| = x = 8$ birimdir.

ÖRNEK

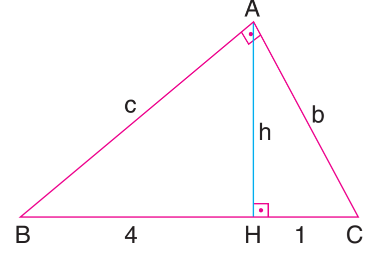
Yandaki ABC dik üçgeninde

$m(\widehat{CAB}) = 90°$

$m(\widehat{AHC}) = 90°$

$|BH| = 4$ birim

$|HC| = 1$ birim



olduğuna göre h, b ve c uzunlukları kaç birimdir? Bulalım.

Çözüm

ABC dik üçgeninde $[AH]$ doğru parçası hipotenüse ait yüksekliktir. Buna göre aşağıdaki eşitlikleri yazabilir, gerekli hesaplamaları yapabiliriz.

$$h^2 = 4 \cdot 1 \qquad \text{(Öklid teoremi)}$$
$$= 4$$
$$h = 2$$

O hâlde $h = 2$ birimdir.

BHA dik üçgeninde Pisagor bağıntısı yardımıyla c uzunluğunu bulalım.

$$|AB|^2 = |BH|^2 + |HA|^2$$
$$= 4^2 + 2^2$$
$$= 16 + 4$$
$$= 20$$
$$|AB| = 2\sqrt{5}$$

O hâlde $c = 2\sqrt{5}$ birimdir.

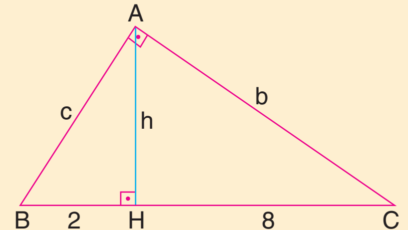
AHC dik üçgeninde Pisagor bağıntısı yardımıyla b uzunluğunu bulalım.

$$|CA|^2 = |AH|^2 + |HC|^2$$
$$= 2^2 + 1^2$$
$$= 4 + 1$$
$$|CA| = \sqrt{5}$$

O hâlde $b = \sqrt{5}$ birimdir.

SIRA SİZDE

Yandaki ABC dik üçgenindeki verilere göre h, b ve c uzunluklarını bulunuz.



ÖRNEK

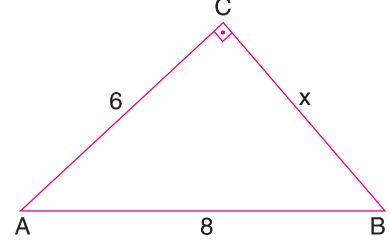
Yandaki ABC dik üçgeninde

$m(\widehat{ACB}) = 90°$

$|CA| = 6$ birim

$|AB| = 8$ birim

olduğuna göre $|BC| = x$ kaç birimdir? Bulalım.



Çözüm

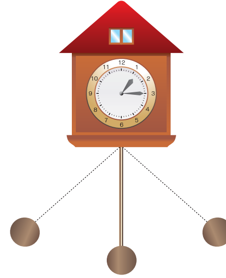
ABC dik üçgeninde Pisagor bağıntısını yazalım ve x uzunluğunu bulalım.

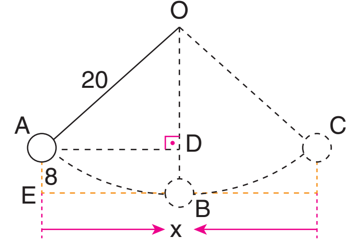
$$|CA|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$$
$$6^2 + x^2 = 8^2$$
$$x^2 = 64 - 36$$
$$= 28$$
$$x = 2\sqrt{7}$$

O hâlde $x = 2\sqrt{7}$ birimdir.

ÖRNEK

Yandaki resim eski bir duvar saatine aittir. Saatin sarkacı şekilde gösterildiği gibi belirli bir yüksekliğe kadar (A noktası) çekilip bırakıldığında A ve C noktaları arasında salınım yapmaya başlıyor ve bir süre sonra yere dik konuma (B noktası) geliyor.





Sarkacın uzunluğu 20 cm, A ve B noktaları arasındaki yükseklik farkı $|AE| = 8$ cm olduğuna göre salınımın uç noktaları arasındaki (maksimum) yatay uzaklığı ($|AC|$) hesaplayalım.

Çözüm

ADO dik üçgeninde $|AD|$ uzunluğunu bulalım.

$$|OA|^2 = |AD|^2 + |DO|^2 \Longrightarrow |OA|^2 = |AD|^2 + (|BO| - |BD|)^2$$
$$20^2 = |AD|^2 + (20-8)^2$$
$$400 = |AD|^2 + 12^2$$
$$\Longrightarrow |AD| = \sqrt{400-144}$$
$$= \sqrt{256}$$
$$= 16 \text{ cm}$$

O hâlde sarkacın uç noktaları arasındaki uzaklık $|AC| = 2|AD| = 2 \cdot 16 = 32$ cm’dir.

ÖRNEK

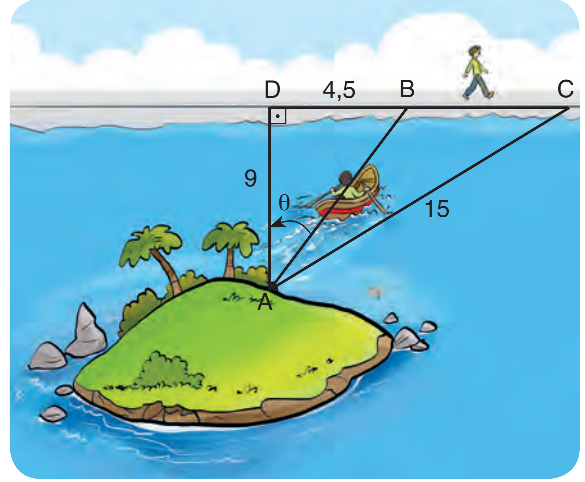
Efe, bulunduğu adadan önce kayıkla B noktasına, sonra kıyıdan yaya olarak C noktasına gidecektir. Yandaki şekil bu durumu modellemektedir. Şekilde

$|DA| = 9$ km,

$|BD| = 4,5$ km

$|AC| = 15$ km dir.

Kayık saatte 2,5 km ve Efe saatte 5 km yol aldığına göre Efe $|AB| + |CB|$ yolunu yaklaşık kaç saatte alır?



Çözüm

DAB dik üçgeninde Pisagor bağıntısı yardımıyla $|AB|$ uzunluğunu bulalım.

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |BD|^2 + |DA|^2 \\ &= (4,5)^2 + 9^2 \\ &= 20,25 + 81 \\ &= 101,25 \\ |AB| &\approx 10 \end{aligned}$$

$|AB|$ uzunluğu yaklaşık 10 km'dir. Kayığın hızı saatte 2,5 km olduğundan kayık bu yolu yaklaşık $\frac{10}{2,5} = 4$ saatte alır.

Efe'nin yürüyerek alacağı $|BC|$ yolunun uzunluğunu bulmak için önce DAC dik üçgeninde Pisagor bağıntısını yazarak $|CD|$ uzunluğunu bulalım.

$$|AC|^2 = |CD|^2 + |DA|^2$$

$$|15|^2 = |CD|^2 + 9^2 \Rightarrow |CD|^2 = 225 - 81$$

$$= 144$$

$$|CD| = 12$$

$|CD| = 12$ km'dir. Şekilden yararlanarak $|CB|$ uzunluğunu bulalım.

$$\begin{aligned} |CB| + |BD| &= |CD| \\ |CB| + 4,5 &= 12 \\ |CB| &= 12 - 4,5 \\ &= 7,5 \end{aligned}$$

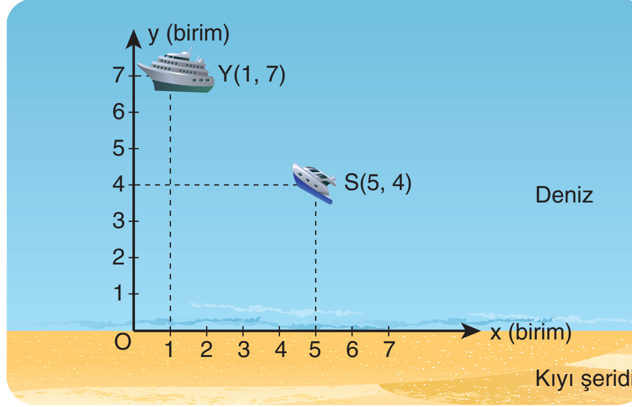
$|CB| = 7,5$ km'dir. Yürüyüş hızı saatte 5 km olduğundan Efe $|CB|$ yolunu,

$$\frac{7,5}{5} = 1,5 \text{ saatte alır.}$$

Buna göre Efe $|AB| + |CB|$ yolunu yaklaşık $4 + 1,5 = 5,5$ saatte alır.

ÖRNEK

Bir yolcu gemisiyle (Y) sahil güvenlik botunun (S) konumları analitik düzlemde aşağıdaki gibidir.



Gemiden gelen acil yardım çağrısı üzerine sahil güvenlik botu geminin bulunduğu noktaya en kısa yoldan saatte 60 km hızla 15 dakikada ulaşıyor.

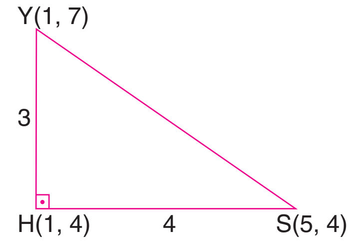
Bu bilgilere göre;

a. Geminin kıyıya olan uzaklığını,

b. Sahil güvenlik botunun gemiye olan uzaklığını bulalım.

Çözüm

a. $Y(1, 7)$ ve $S(5, 4)$ noktaları arasındaki uzaklığı dik üçgen çizerek hesaplayalım.



Yandaki YHS üçgeninde $|YH| = 3$ birim ve $|HS| = 4$ birimdir. Y ile S noktaları arasındaki uzaklığı Pisagor bağıntısı yardımıyla bulalım.

$$|YS|^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

$$|YS| = 5 \text{ birim}$$

Sahil güvenlik botu 1 saatte (60 dakikada) 60 km yol aldığına göre 15 dakikada 15 km yol almıştır.

Analitik düzlemde 5 birimlik mesafe gerçekte 15 km ise 1 birim 3 km'dir.

Yolcu gemisi kıyıdan 7 birim uzaklıktadır.

O hâlde geminin kıyıya olan uzaklığı $3 \cdot 7 = 21$ km'dir.

b. Sahil güvenlik botunun gemiye olan uzaklığı 5 birim ve analitik düzlemde 1 birimlik mesafe gerçekte 3 km olduğundan aradığımız uzaklık $3 \cdot 5 = 15$ km'dir.

SIRA SİZDE

Yukarıdaki örnekte yolcu gemisinin bulunduğu yerin koordinatını $Y(6, 15)$ ve sahil güvenlik botunun bulunduğu yerin koordinatını $S(1, 3)$ alarak $|YS|$ uzaklığını km türünden bulunuz.

ÖRNEK

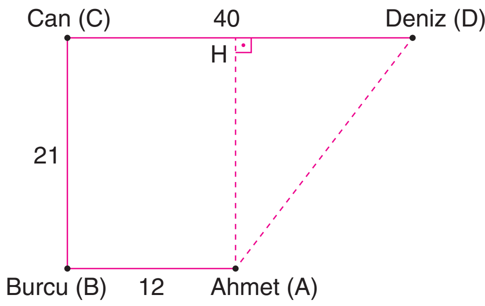
Dört arkadaşın düz bir alandaki konumlarıyla ilgili olarak aşağıdaki bilgiler verilmiştir.

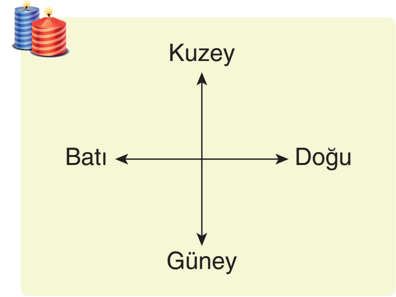
- Burcu, Ahmet'in 12 m batısındadır.
- Can, Burcu'nun 21 m kuzeyindedir.
- Deniz, Can'ın 40 m doğusundadır.

Buna göre Ahmet ile Deniz arasındaki en kısa uzaklığı hesaplayalım.

Çözüm

Verilen bilgileri aşağıdaki gibi modelleyelim. A noktasından [CD] doğru parçasına [AH] dikmesini çizelim.





AHD dik üçgeninde Pisagor bağıntısı yardımıyla $|AD|$ uzaklığını hesaplayalım.

$$|AD|^2 = |AH|^2 + |HD|^2$$

$$|AD|^2 = |AH|^2 + (|CD| - |CH|)^2 \Rightarrow |AD|^2 = 21^2 + (40 - 12)^2$$

$$= 21^2 + 28^2$$

$$= (7 \cdot 3)^2 + (7 \cdot 4)^2$$

$$= 7^2 \cdot 3^2 + 7^2 \cdot 4^2$$

$$= 7^2 (3^2 + 4^2)$$

$$= 7^2 \cdot 25$$

$$= 7^2 \cdot 5^2$$

$$|AD| = 7 \cdot 5$$

$$= 35 \text{ m}$$

O hâlde Ahmet ile Deniz arasındaki uzaklık 35 m'dir.

SIRA SİZDE

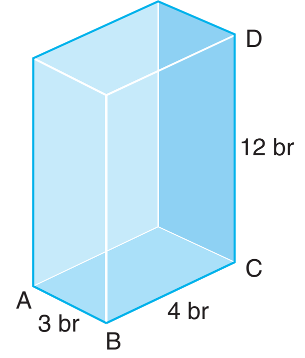
Örnekteki bilgileri, Burcu'nun konumunu orijin noktası alarak dik koordinat düzleminde gösteriniz. A ve D noktalarının koordinatlarını kullanarak $|AD|$ uzunluğunu metre cinsinden hesaplayınız.

ÖRNEK

Yanda verilen dikdörtgenler prizması biçimindeki akvaryumun;

a. Taban köşegeninin uzunluğunu,

b. Cisim köşegeninin uzunluğunu hesaplayalım.



Çözüm

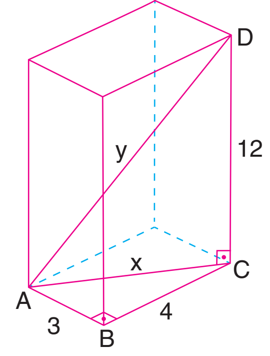
Taban köşegeni $|CA| = x$ ve cisim köşegeni $|DA| = y$ olsun.

a. Tabandaki ABC dik üçgenini kullanarak $|CA| = x$ uzunluğunu bulalım.

$$\begin{aligned} x^2 &= |AB|^2 + |BC|^2 \\ &= 9 + 16 \\ &= 25 \\ x &= 5 \text{ br} \end{aligned}$$

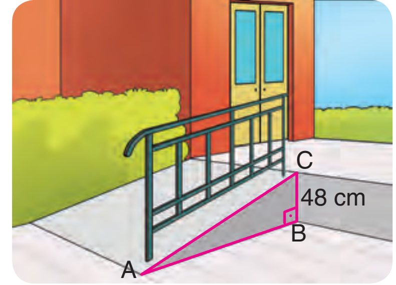
b. ACD dik üçgenini kullanarak $|DA| = y$ uzunluğunu bulalım.

$$\begin{aligned} y^2 &= |AC|^2 + |CD|^2 \\ &= 5^2 + 12^2 \\ &= 25 + 144 \\ &= 169 \\ y &= 13 \text{ br} \end{aligned}$$



ÖRNEK

Yanda modellenen engelli rampasının eğimi $\frac{12}{35}$, yüksekliği 48 cm olduğuna göre uzunluğu kaç cm'dir? Bulalım.

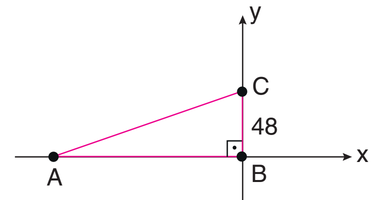


Çözüm

Rampayı dik koordinat düzlemine şekildeki gibi yerleştirelim.

$$\text{Eğim} = \frac{\text{y eksenindeki artış}}{\text{x eksenindeki artış}} = \frac{48}{|AB|}$$

$$\frac{12}{35} = \frac{48}{|AB|} \Rightarrow |AB| = 140 \text{ cm}$$



ABC dik üçgeninde Pisagor bağıntısını yazalım.

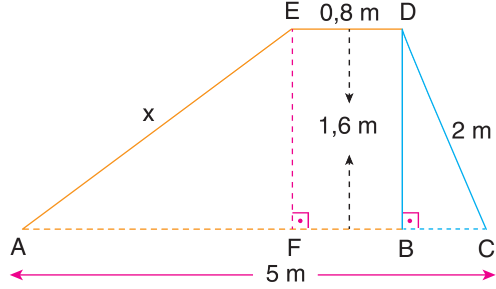
$$\begin{aligned} |AC|^2 &= |AB|^2 + |BC|^2 \\ &= 140^2 + 48^2 \\ &= 19\ 600 + 2304 \\ &= 21\ 904 \\ |AC| &= 148 \text{ cm} \end{aligned}$$

O hâlde rampanın uzunluğu 148 cm'dir.

ÖRNEK

Bir kaydırağın fotoğrafı ve bu kaydırağı modelleyen taslak çizim aşağıda verilmiştir.

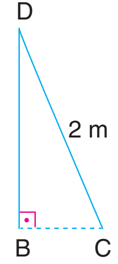




Buna göre kaydırağın uzunluğunu simgeleyen $|EA|$ uzunluğunu hesaplayalım.

Çözüm

DBC dik üçgeninde,



$|CD|^2 = |DB|^2 + |BC|^2$

$2^2 = (1,6)^2 + |BC|^2 \Rightarrow |BC|^2 = 4 - 2,56$

$= 1,44$

$|BC| = 1,2$ m'dir.

$|FB| = |DE| = 0,8$ m olduğundan

$|AF| = |AC| - (|BC| + |FB|)$

$= 5 - (1,2 + 0,8)$

$= 5 - 2$

$= 3$ m'dir.

AFE dik üçgeninde $|EA|$ uzunluğunu hesaplayalım.

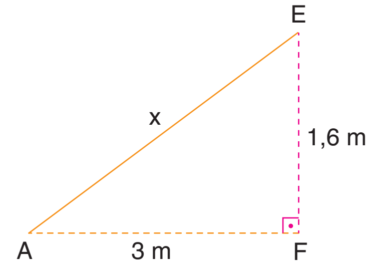
$|EA|^2 = |AF|^2 + |FE|^2$

$= 3^2 + (1,6)^2$

$= 9 + 2,56$

$= 11,56$

$|EA| = 3,4$ m



O hâlde kaydırağın uzunluğu 3,4 m'dir.

BULMACA

Mesafe Ölçme ve Hesaplama

Google Haritalar'ı kullanarak iki veya daha fazla nokta arasındaki mesafeyi ölçebilirsiniz. Örneğin iki şehir arasındaki mesafeyi kuş uçuşu hesaplayabilirsiniz. Bunun için aşağıdakileri yapınız.

1. Google Haritalar'ı açınız.
2. Başlangıç noktanızı sağ tıklayınız.
3. "Mesafe ölç"ü tıklayınız.
4. Ölçmek istediğiniz bir uzaklığı oluşturmak için harita üzerinde herhangi bir yeri tıklayınız. Ardından ilave ölçüm noktaları ekleyiniz. İsteğe bağlı olarak bir noktayı sürükleyerek taşıyabilir veya tıklayarak kaldırabilirsiniz.
5. Toplam mesafeyi kilometre cinsinden öğrenmek için arama kutusunun altına bakınız.
6. Son olarak arama kutusunun altındaki kartta bulunan x işaretini tıklayınız veya haritayı sağ tıklayıp "Ölçümü temizle"yi seçiniz.



- Yukarıdaki adımları uygulayarak Samsun-İskenderun, İskenderun-Fethiye, Fethiye-Samsun arası uzaklıkları (kuş uçuşu) bulunuz. Boş bırakılan yerlere yazınız.

  Samsun-İskenderun arası (kuş uçuşu) uzaklık: ....

  İskenderun-Fethiye arası (kuş uçuşu) uzaklık: ....

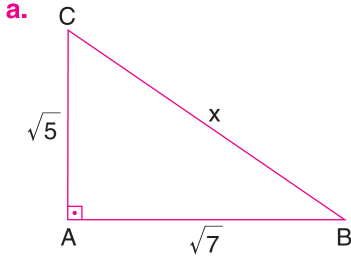
  Fethiye-Samsun arası (kuş uçuşu) uzaklık: ....

- Bu üç şehrin haritadaki konumları yaklaşık olarak bir dik üçgen oluşturmaktadır. Fethiye-Samsun arasındaki uzaklığı Pisagor bağıntısını kullanarak hesap makinesi yardımıyla bulunuz.
- Bulduğunuz sonucu gerçek değeriyle karşılaştırınız.

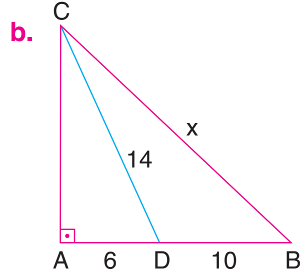
ALIŞTIRMALAR

1. Şekillerdeki verilere göre x ile gösterilen uzunlukları bulunuz.

a.

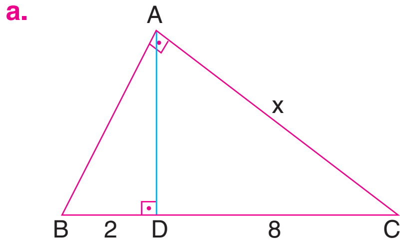


b.

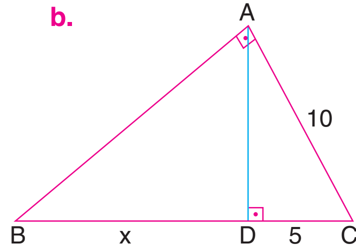


2. Şekillerdeki verilere göre x ile gösterilen uzunlukları bulunuz.

a.



b.



3. Yandaki şekilde

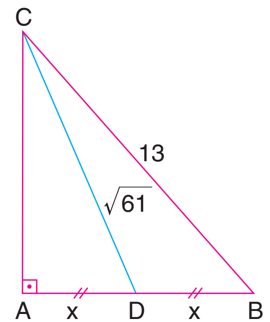
$m(\widehat{CAD}) = 90°$

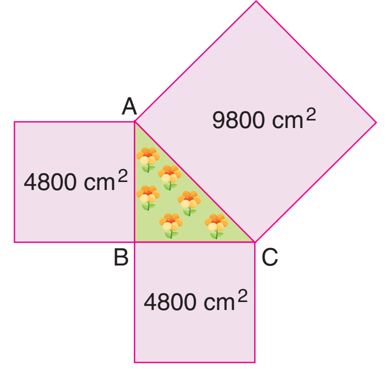
$|AD| = |DB|$

$|CD| = \sqrt{61}$ birim

$|CB| = 13$ birim

olduğuna göre $|AD| = x$ kaç birimdir?





4. Yanda verilen dörtgenler kare olduğuna göre çiçek bahçesi modelinin bir dik üçgen olup olmadığını açıklayınız.

5. Yandaki şekilde

$m(\widehat{ABC}) = 90°$

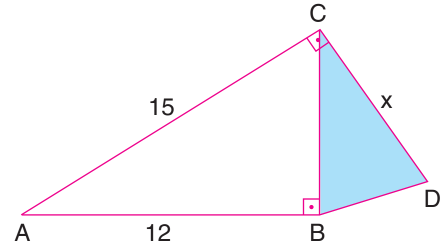
$m(\widehat{DCA}) = 90°$

$|AB| = 12$ birim

$|CA| = 15$ birim

$A(\widehat{BDC}) = 27$ birimkare

olduğuna göre $|DC| = x$ kaç birimdir?



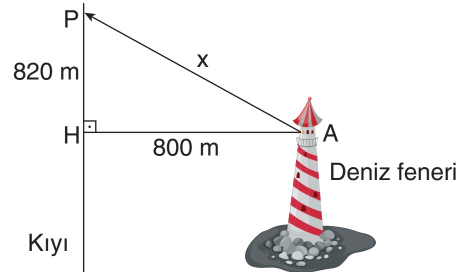
6. Yandaki şekilde bir deniz fenerinin aydınlattığı bölgenin H ve P sınırları verilmiştir. Şekilde

$m(\widehat{PHA}) = 90°$

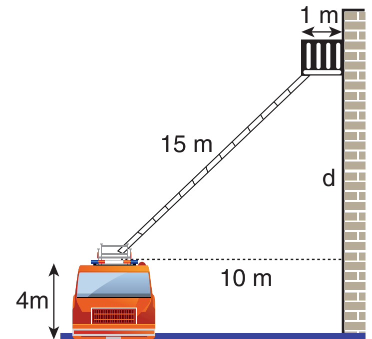
$|HA| = 800$ m

$|PH| = 820$ m

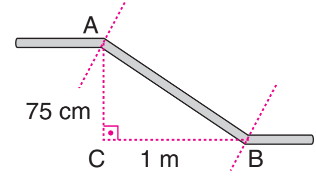
olduğuna göre $|PA| = x$ kaç m'dir?



7. Yanda verilen şekle göre balkonun yerden yüksekliğini hesaplayınız.

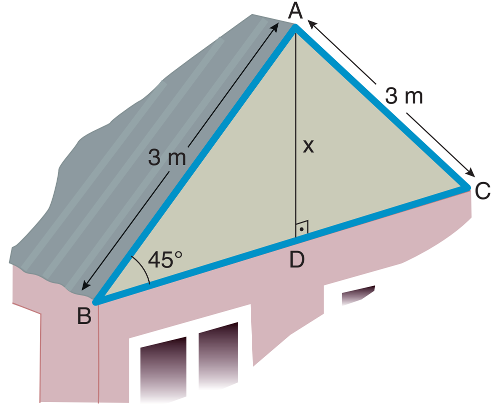


8. Bir içme suyu borusu yukarıdan aşağıya doğru, şekilde verildiği gibi yerleştirilecektir. Borunun yerleştirileceği üst yatay düzlem, alt yatay düzlemden 75 cm yukarıdadır ve üstteki borunun bitim noktası ile alttaki yatay borunun başlangıcı arasındaki yatay uzaklık 1 metredir. Ustaların boruları doğru keserek gerektiği şekilde yerleştirilmeleri için yandaki şekli gözden geçiriniz.



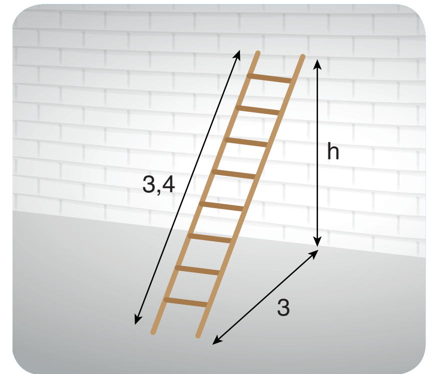
Üst yatay boruyu alt yatay boruya bağlayan parçanın $|AB|$ uzunluğu kaç metre olmalıdır? Hesaplayınız.

9. Yandaki şekilde çatı eğimi 45° olan bir bina görülüyor. Şekildeki verileri kullanarak çatıyı tutan orta direğin uzunluğunu $(|AD| = x)$ hesaplayınız (Yol gösterme: Şekildeki BAC açısının ölçüsü 90° dir. Neden?).



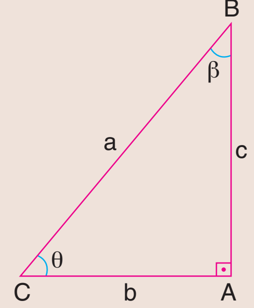
10. 3,4 m uzunluğundaki bir merdiven duvara dayalıdır. Merdivenin yerdeki ayağı duvardan 3 m uzaklıktadır. Yandaki şekil bu durumu modellemektedir.

Merdivenin duvara değen ayağının yerden yüksekliği yaklaşık kaç metredir?



Dik Üçgende Trigonometrik Oranlarla İlgili Problemler

HATIRLAYALIM



- Bir dik üçgende bir θ dar açısının sinüs değeri, açının karşısında bulunan dik kenarın uzunluğunun hipotenüsün uzunluğuna oranıdır. Bu değer $\sin\theta$ sembolüyle gösterilir.

$$\sin\theta = \frac{\text{karşı dik kenarın uzunluğu}}{\text{hipotenüsün uzunluğu}} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{c}{a}$$

- Bir dik üçgende bir θ dar açısının kosinüs değeri, açıya komşu olan dik kenarın uzunluğunun hipotenüsün uzunluğuna oranıdır. Bu değer $\cos\theta$ sembolüyle gösterilir.

$$\cos\theta = \frac{\text{komşu dik kenarın uzunluğu}}{\text{hipotenüsün uzunluğu}} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{b}{a}$$

- Bir dik üçgende bir θ dar açısının tanjant değeri, açının karşısında bulunan dik kenarın uzunluğunun açıya komşu olan dik kenarın uzunluğuna oranıdır. Bu değer $\tan\theta$ sembolüyle gösterilir.

$$\tan\theta = \frac{\text{karşı dik kenarın uzunluğu}}{\text{komşu dik kenarın uzunluğu}} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{c}{b}$$

- Bir dik üçgende bir θ dar açısının kotanjant değeri, açıya komşu olan dik kenarın uzunluğunun açının karşısında bulunan dik kenarın uzunluğuna oranıdır. Bu değer $\cot\theta$ sembolüyle gösterilir.

$$\cot\theta = \frac{\text{komşu dik kenarın uzunluğu}}{\text{karşı dik kenarın uzunluğu}} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{b}{c}$$

SIRA SİZDE

- Yukarıda verilen şekle göre aşağıdaki ifadeleri tamamlayınız.

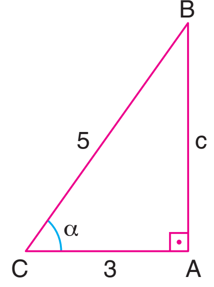
a. $\sin\beta = \frac{}{}$ **b.** $\cos\beta = \frac{}{}$

c. $\tan\beta = \frac{}{}$ **ç.** $\cot\beta = \frac{}{}$

- $\tan\theta$ ile $\cot\theta$ ve $\tan\beta$ ile $\cot\beta$ ifadelerini karşılaştırınız. Bir dar açının tanjantı ile kotanjantı arasındaki ilişkiyi belirtiniz.

ÖRNEK

Bir dar açının ölçüsü α olmak üzere $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ olduğuna göre verilen açının diğer trigonometrik oranlarını bulalım.



Çözüm

Yandaki ABC dik üçgeninde $m(\widehat{C}) = \alpha$ olsun.

$\cos\alpha = \frac{|CA|}{|BC|} = \frac{3}{5} \Rightarrow |CA| = 3$ birim, $|BC| = 5$ birim ve $|AB| = c$ birim olsun.

ABC dik üçgeninde Pisagor bağıntısını yazalım ve üçgenin AB kenarının uzunluğunu bulalım.

$$|BC|^2 = |CA|^2 + |AB|^2$$

$$25 = 9 + c^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 25 - 9 = 16 \quad \Rightarrow \quad c = 4$$

Buna göre aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$\sin\alpha = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\alpha = \frac{|AB|}{|CA|} = \frac{4}{3}$$

$$\cot\alpha = \frac{|CA|}{|AB|} = \frac{3}{4}$$

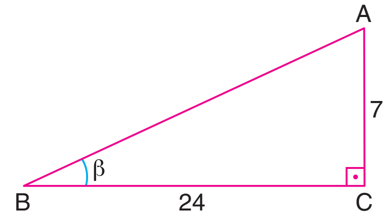
ÖRNEK

Bir dar açının ölçüsü β olmak üzere $\tan\beta = \frac{7}{24}$ tür. Buna göre β nın diğer trigonometrik oranlarını bulalım.

Çözüm

Yandaki ABC dik üçgeninde $m(\widehat{B}) = \beta$ olsun.

$\tan\beta = \frac{|CA|}{|BC|} = \frac{7}{24}$ tür. $|CA| = 7$ birim ve $|BC| = 24$ birim alabiliriz. ABC dik üçgeninde Pisagor bağıntısını yazalım ve üçgenin AB kenarının uzunluğunu hesaplayalım.



$$|AB|^2 = |BC|^2 + |CA|^2 = 24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625$$

$$|AB| = 25 \text{ birim}$$

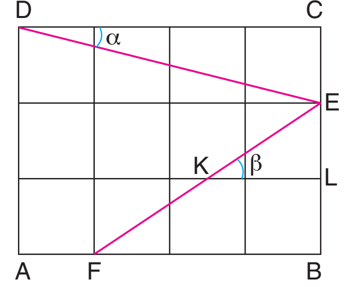
Buna göre aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$\sin\beta = \frac{|CA|}{|AB|} = \frac{7}{25}$$

$$\cos\beta = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{24}{25}$$

$$\cot\beta = \frac{|BC|}{|CA|} = \frac{24}{7}$$

ÖRNEK

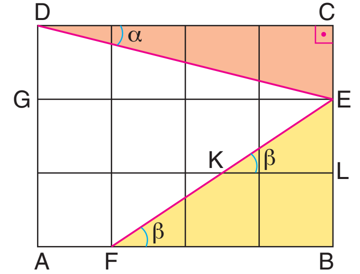


Şekildeki ABCD dikdörtgeni 12 birim kareden oluşmaktadır. $m(\widehat{CDE}) = \alpha$ ve $m(\widehat{EKL}) = \beta$ olmak üzere, $\tan\alpha$ ve $\tan\beta$ değerlerini bulalım.

Çözüm

ECD dik üçgeninde

$$\tan\alpha = \frac{|EC|}{|CD|} = \frac{1}{4} \text{ tür.}$$



EKL açısı ile EFB açısı yöndeş açılardır. KL // FB olduğundan bu açılar eştir.

$$m(\widehat{EKL}) = m(\widehat{EFB}) = \beta$$

FBE dik üçgeninde

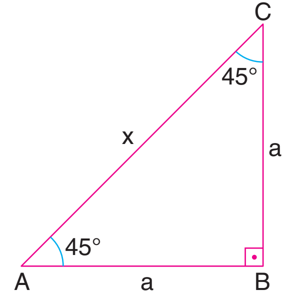
$$\tan\beta = \frac{|BE|}{|FB|} = \frac{2}{3} \text{ tür.}$$

SIRA SİZDE

Şekildeki BEF açısının trigonometrik oranlarını yazınız.

ÖRNEK

Bir ikizkenar dik üçgen yardımıyla 45° nin trigonometrik oranlarını yazalım.



Çözüm

Yandaki ABC ikizkenar dik üçgeninin [AB] ve [BC] dik kenarlarının uzunlukları a birimdir. Bu üçgende Pisagor bağıntısını yazalım ve $|CA| = x$ uzunluğunu bulalım.

$$|CA|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$
$$x^2 = a^2 + a^2$$
$$x^2 = 2a^2$$
$$x = \sqrt{2}a$$
$$|CA| = x = \sqrt{2}a \text{ birimdir.}$$

$m(\widehat{CAB}) = 45°$ nin trigonometrik oranlarını yazalım.

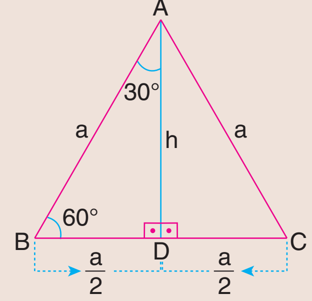
$$\sin 45° = \frac{|BC|}{|CA|} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan 45° = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cos 45° = \frac{|AB|}{|CA|} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cot 45° = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{a}{a} = 1$$

Özel Açıların Ölçülerinin Trigonometrik Oranları

HATIRLAYALIM

Bir kenarının uzunluğu a birim olan ABC eşkenar üçgenini ve [AD] yüksekliğini çizelim.



- ABD dik üçgeninde $|BD|^2 + |DA|^2 = |AB|^2$ dir.

  $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$

  $h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

- $m(\widehat{DAB}) = 30°$ ve $m(\widehat{B}) = 60°$ dir.

- $\sin 60° = \frac{|DA|}{|AB|} = \frac{h}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- $\cos 60° = \frac{|BD|}{|AB|} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$

- $\tan 60° = \frac{|DA|}{|BD|} = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \frac{2}{a} = \sqrt{3}$

- $\cot 60° = \frac{|BD|}{|DA|} = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

- $\sin 30° = \frac{|BD|}{|AB|} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$

- $\cos 30° = \frac{|DA|}{|AB|} = \frac{h}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- $\tan 30° = \frac{|BD|}{|DA|} = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

- $\cot 30° = \frac{|DA|}{|BD|} = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \frac{2}{a} = \sqrt{3}$

30° lik ve 60° lik açıların elde ettiğimiz trigonometrik oranlarına göre aşağıdaki ifadeyi söyleyebiliriz.

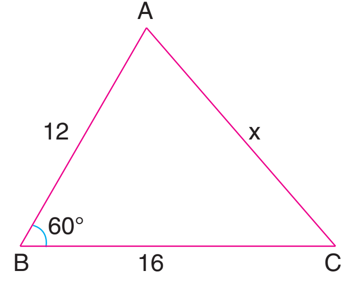
Açı ölçüleri 30°, 60° ve 90° olan bir dik üçgende 30° lik açının karşısındaki dik kenarın uzunluğu hipotenüsün uzunluğunun yarısına, 60° lik açının karşısındaki dik kenarın uzunluğu 30° lik açının karşısındaki dik kenarın uzunluğunun $\sqrt{3}$ katına eşittir.



Özel açıların trigonometrik oranlarının aklınızda kalması için aşağıdaki tabloyu inceleyiniz.

sin 0°	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	cos 90°
sin 30°	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	cos 60°
sin 45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	cos 45°
sin 60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	cos 30°
sin 90°	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	cos 0°

ÖRNEK



Yanda verilen ABC üçgeninde

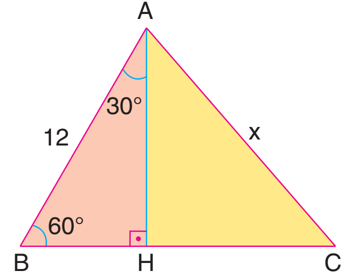
$m(\widehat{ABC}) = 60°$

$|AB| = 12$ birim

$|BC| = 16$ birim

olduğuna göre $|CA| = x$ kaç birimdir? Bulalım.

Çözüm

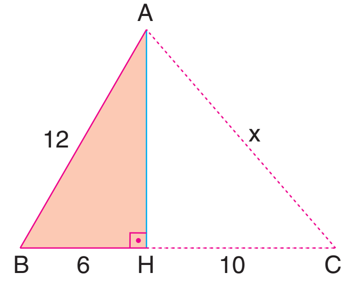


ABC üçgeninin $[AH]$ yüksekliğini çizelim.

ABH üçgeninin açı ölçüleri 30°, 60° ve 90° olur.

"Bir dik üçgende 30° lik açının karşısındaki dik kenarın uzunluğu hipotenüsün uzunluğunun yarısına eşittir." önermesi gereğince

$$|BH| = \frac{|AB|}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

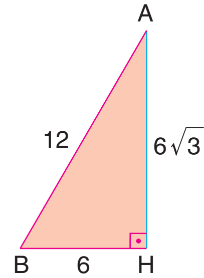


$|BH| = 6$ birim olur. Buna göre

$|HC| = 16 - 6 = 10$ birim olur.

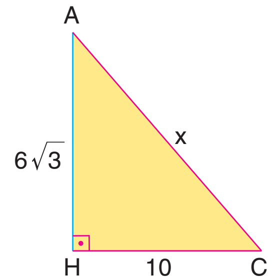
"Bir dik üçgende 60° lik açının karşısındaki dik kenarın uzunluğu 30° lik açının karşısındaki dik kenarın uzunluğunun $\sqrt{3}$ katıdır." önermesi gereğince

$$|AH| = \sqrt{3} \cdot |BH| = \sqrt{3} \cdot 6 = 6\sqrt{3}$$



AHC dik üçgeninde Pisagor bağıntısını yazalım ve $|CA| = x$ değerini bulalım.

$$|CA|^2 = x^2 = |AH|^2 + |HC|^2$$
$$= (6\sqrt{3})^2 + (10)^2$$
$$= 108 + 100$$
$$= 208$$
$$x = 4\sqrt{13}$$



O hâlde $|CA| = x = 4\sqrt{13}$ birimdir.

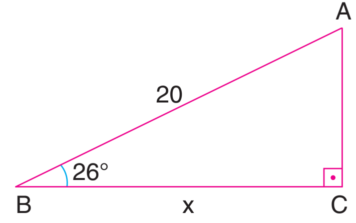
ÖRNEK

Yanda verilen ABC dik üçgeninde

$m(\widehat{BCA}) = 90°$

$m(\widehat{ABC}) = 26°$

$|AB| = 20$ birim



olduğuna göre $|BC| = x$ yaklaşık kaç birimdir? Bulalım $(\cos 26° \approx 0,9)$.

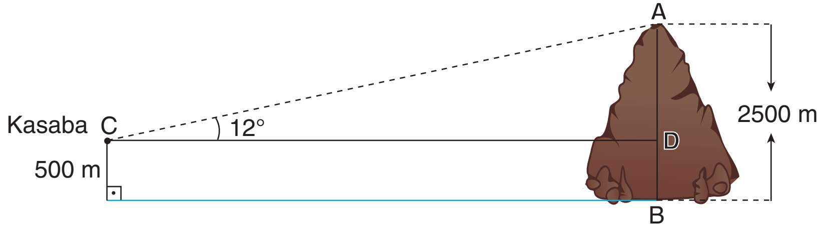
Çözüm

ABC dik üçgeninde,

$$\cos 26° = \frac{|BC|}{|AB|} \Rightarrow 0,9 \approx \frac{x}{20} \Rightarrow x \approx 18 \text{ birimdir.}$$

ÖRNEK

Denizden yüksekliği 500 metre olan bir kasabanın yakınında bulunan bir dağın denizden yüksekliği 2500 metredir. Dağın en yüksek noktası (tepesi) A, dağın dip noktası (zemini) B, kasabanın bulunduğu nokta C ve C'den AB'ye inilen dikmenin ayağı D olmak üzere $m(\widehat{ACD}) = 12°$ dir. Aşağıdaki şekil bu durumu modellemektedir.

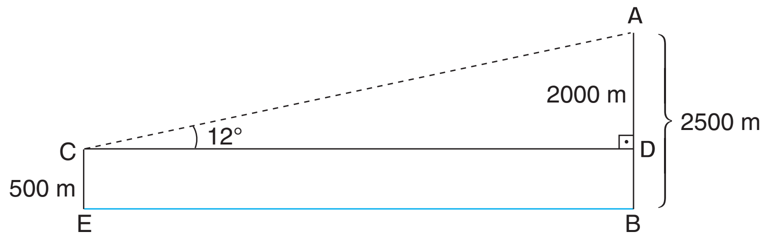


Buna göre kasabanın, dağın tepesine olan uzaklığını $(|AC|)$ yaklaşık olarak bulalım $(\sin 12° \approx 0,2)$.

Çözüm

Şekilden aşağıdaki eşitlikleri yazalım. Gerekli hesaplamaları yapalım.

$$|AD| = |AB| - |DB|$$
$$= 2500 - 500$$
$$= 2000 \text{ m}$$



CDA dik üçgeninde,

$$\sin \widehat{C} = \frac{|DA|}{|AC|}$$

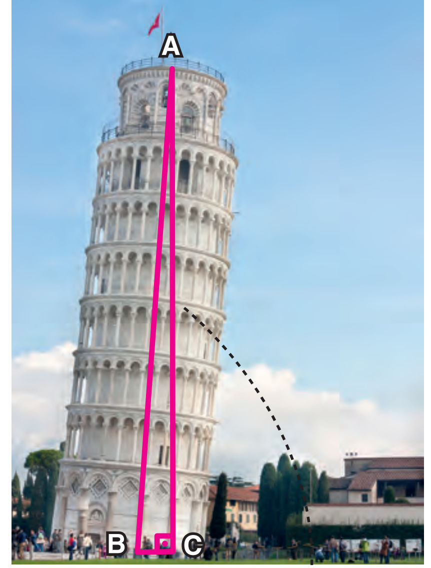
$$\sin 12° = \frac{2000}{|AC|} \Rightarrow 0,2 \approx \frac{2000}{|AC|} \Rightarrow |AC| \approx \frac{2000}{0,2}$$

$$|AC| \approx 10\ 000 \text{ metre} = 10 \text{ km}$$

O hâlde kasabanın, dağın tepesine olan uzaklığı yaklaşık 10 km'dir.

ÖRNEK

Eğri duruşuyla ünlü bir İtalyan anıtı olan Pisa Kulesi'ni hepimiz biliriz. Yapılan ölçümler, anıtın 5,5 derecelik bir açı ile eğildiğini gösteriyor. Yüksekliği 55 metre olan ve üzerinde 7 kat bulunan bu kulenin ağırlığı yaklaşık 14 500 tondur.



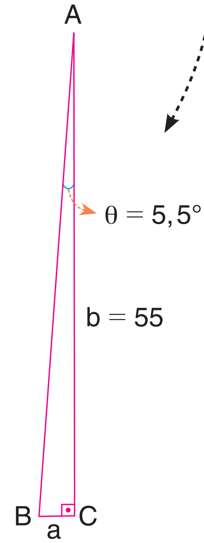
Buna göre;

a. Yerde kulenin merkezinde duran bir kişi ile tepedeki merkezde duran bir kişi arasındaki yatay uzaklığı bulalım (Doğal olarak dik bir kulede bu uzunluğun sıfır olması gerekir.).

b. Kulenin boyunu bulalım.

$(\tan(5,5)^\circ \approx 0,096,\ \cos(5,5)^\circ \approx 0,995)$

Çözüm



a. Resimdeki ABC dik üçgeninde $\tan\theta = \frac{a}{b}$ dir.

Bilinen değerleri yerlerine yazalım ve $|BC| = a$ uzunluğunu bulalım.

$$\tan(5,5)^\circ = \frac{a}{55} \Longrightarrow a = 55 \cdot \tan(5,5)^\circ$$
$$\approx 55 \cdot 0,096$$
$$\approx 5,3 \text{ m}$$

O hâlde yerde kulenin merkezinde duran bir kişi ile tepedeki merkezde duran bir kişi arasındaki yatay uzaklık yaklaşık 5,3 m'dir.

b. Şekilden aşağıdaki eşitlikleri yazıp kulenin boyunu gösteren $|AB|$ uzunluğunu bulalım.

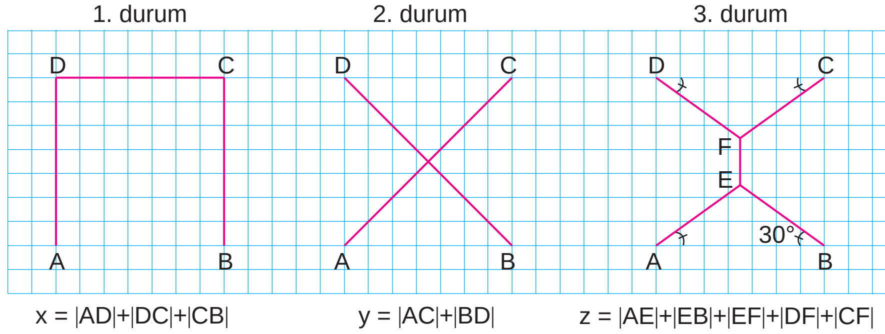
$$\cos\theta = \frac{|CA|}{|AB|} \Rightarrow |AB| = \frac{|CA|}{\cos\theta}$$
$$= \frac{55}{\cos(5,5)^\circ}$$
$$\approx \frac{55}{0,995}$$
$$\approx 55,3$$

O hâlde kulenin boyu yaklaşık 55,3 metredir.

ÖRNEK

Bir karenin köşeleri konumundaki A, B, C ve D yerleşim bölgelerinde yaşayan kişilerin telefon görüşmelerini sağlayacak biçimde bir telefon şebekesi (ağı) kurulması düşünülüyor. Bu işin aşağıda gösterilen üç farklı biçimde yapılabileceği belirtiliyor. Buna göre x, y ve z olarak gösterilen uzunlukları bulalım.





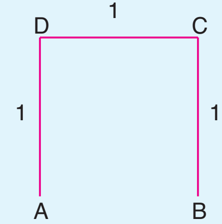
Çözüm

ABCD karesinin bir kenarının uzunluğu 1 birim olarak alalım.

1. durum

Döşenecek kablonun uzunluğu,

$$x = |AD| + |DC| + |CB|$$
$$= 1 + 1 + 1$$
$$= 3 \text{ birim olur.}$$

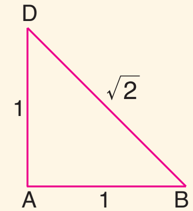


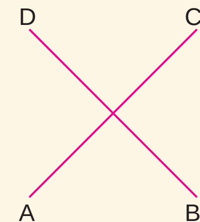
2. durum

ABD üçgeninde,

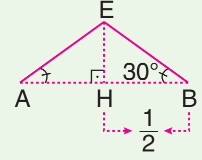
$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2$$
$$= 1 + 1$$
$$|BD|^2 = 2$$
$$\Rightarrow |BD| = \sqrt{2} \text{ birim}$$
$$y = |AC| + |BD|$$
$$= \sqrt{2} + \sqrt{2}$$
$$= 2\sqrt{2} \text{ dir.}$$

Döşenecek kablonun uzunluğu $2\sqrt{2}$ birim olur.





3. durum

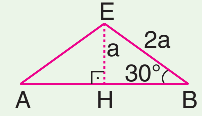


EAB üçgeninin $[EH]$ yüksekliğini çizelim.

$|AH| = |HB| = \frac{1}{2}$ birim olur.

EHB dik üçgeninde $|EH| = a$ olsun.

"Bir dik üçgende 30° lik açının karşısındaki dik kenarın uzunluğu, hipotenüsün uzunluğunun yarısına eşittir." önermesi gereğince $|EB| = 2a$ olur.



EHB üçgeninde, $|EB|^2 = |EH|^2 + |HB|^2 \Rightarrow (2a)^2 = (a)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$$4a^2 = a^2 + \frac{1}{4}$$

$$3a^2 = \frac{1}{4}$$

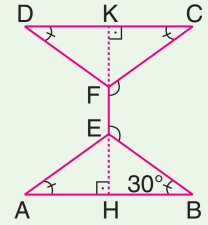
$$a^2 = \frac{1}{4 \cdot 3}$$

$$a = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$|EH| = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow |EB| = 2a = \frac{2}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$|EF| = |AD| - |EH| - |FK| = 1 - 2a$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Döşenecek kablonun uzunluğu,

$$z = |AE| + |EB| + |EF| + |DF| + |CF| = \frac{4\sqrt{3}}{3} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= 1 + \frac{3\sqrt{3}}{3}$$

$$= 1 + \sqrt{3} \text{ birim olur.}$$



ÇİZGE KURAMI

"Çizge kuramı" matematiğin "doğru parçalarıyla birleştirilen noktalar" ile ilgili bir dalıdır.

"Düzlemde n noktayı birleştiren en kısa ağı bulma" problemine yanıt verir. Elektronik devreler, demir yolu hatları, uçuş rotaları, telefon hatları vb. ulaşım ve iletişim biçimleri için en kısa ağları bulma problemi gibi.

ALIŞTIRMALAR

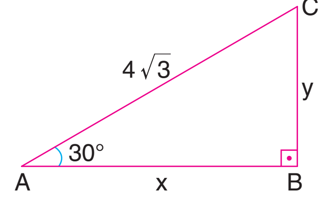
1. Yandaki şekilde

$m(\widehat{ABC}) = 90°$

$m(\widehat{CAB}) = 30°$

$|CA| = 4\sqrt{3}$ birim

olduğuna göre $|AB| = x$ ve $|BC| = y$ uzunluklarını bulunuz.



2. Yandaki şekilde

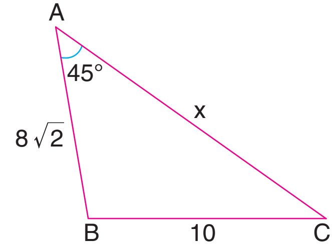
$m(\widehat{CAB}) = 45°$

$|AB| = 8\sqrt{2}$ birim

$|BC| = 10$ birim

olduğuna göre $|CA| = x$ uzunluğunu bulunuz.

[Yol gösterme: ABC üçgeninin [BH] yüksekliğini çiziniz.]



3. Yandaki şekilde

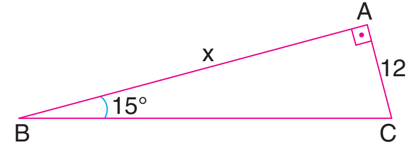
$m(\widehat{CAB}) = 90°$

$m(\widehat{ABC}) = 15°$

$|CA| = 12$ birim

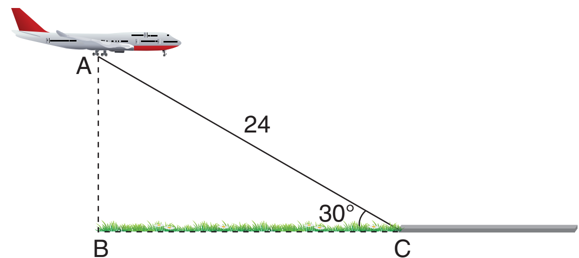
olduğuna göre $|AB| = x$ uzunluğunu bulunuz.

[Yol gösterme: $m(\widehat{BCD}) = 15°$ olacak biçimde [AB] kenarı üzerinde bir D noktası alınız.]

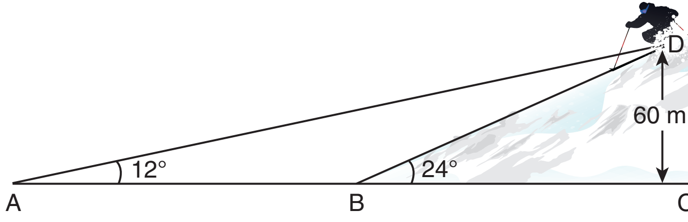


4. Bir uçak C noktasında başlayan piste inecektir. C noktasının uçağın bulunduğu A noktasına uzaklığı $|AC| = 24$ km'dir. [AC] nin yatay düzlemle yaptığı açı 30° dir.

Buna göre uçağın yerden yüksekliğini bulunuz $(\sin 30° = 0,5)$.



5.





$\sin 12° \approx 0,2$

$\sin 24° \approx 0,4$

Yukarıdaki şekil bir kayak pistini modellemektedir. Şekilde, $m(\widehat{DAB}) = 12°$, $m(\widehat{DBC}) = 24°$ ve $|DC| = 60$ metredir.

Buna göre,

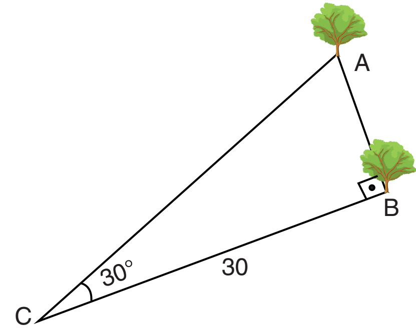
a. $|BD|$ uzunluğunu

b. $|AD|$ uzunluğunu bulunuz.

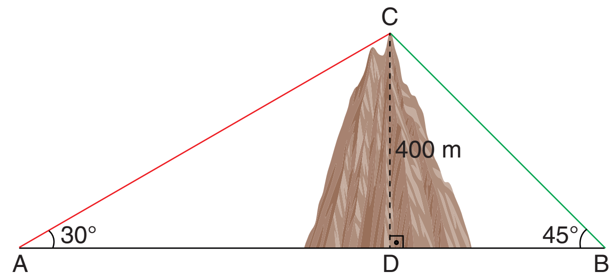
6. Bir binaya, engelli rampası yapılacaktır. Bu rampanın yatay düzlemle yaptığı açının ölçüsü 9 derece olacaktır. Buna göre, 0,8 metre yüksekliğindeki rampanın uzunluğu yaklaşık kaç metre olur $(\sin 9° \approx 0,16)$?

7. Ece, bir nehrin karşılıklı kenarlarında bulunan iki ağaç arasındaki uzaklığı ölçmek için yandaki ABC üçgenini çiziyor.

$|CB| = 30\,m$, $m(\widehat{CBA}) = 90°$ ve $m(\widehat{ACB}) = 30°$ olduğuna göre $|AB|$ uzunluğunu bulunuz.



8. A ve B kasabalarının konumu yanda verilmiştir. Bu iki kasaba arasında kalan ve $|CD|$ ile gösterilen dağın yüksekliği 400 m olduğuna göre A ve B kasabaları arasındaki uzaklığı bulunuz.



Üçgenlerin Benzerliğiyle İlgili Problemler

Gölgelerin Gücü ve Thales

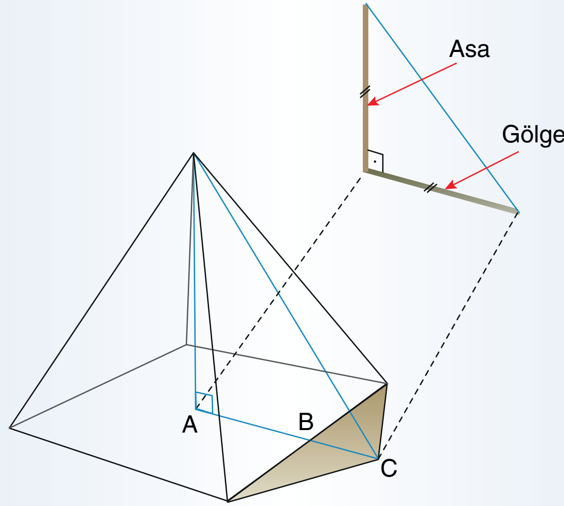


Buluşların pek çoğu, anlatıldığı şekliyle çok heyecan vericidir. İlginç bir nokta, hayranlık verici ince bir zekâ, bir parça da tesadüf... Başına elma düşen Newton'un (Nivton) aklı çarpma etkisiyle mi yerine geldi dersiniz? Şu bir gerçek ki şans, hazırlıklı kafalara güler. Eğer birikiminiz yoksa kendinizden mucize beklemeyin. Yeterince bilginiz varsa, ama yine de inatçı soru çözülmüyorsa sabırla bekleyin. Herhangi bir problemi (matematik problemi olması şart değil) ne kadar çok düşünürseniz o kadar çok ve çeşitli çözüm üretirsiniz ve sonunda en uygun, en ekonomik, en estetik çözümü bulup yolunuza devam edersiniz.

Benim şimdi öyküsünü anlatacağım buluş milattan önce 600'lerde geçiyor. Geometrideki bilgi birikiminin çok eksik olduğu ve bu nedenle yeni bilgilere çok ihtiyaç duyulduğu zamanlarda. Hikâyemizin kahramanını hepimiz yakından tanıyoruz: Thales (Tales).

Hikâyemiz sıcak bir Mısır gününde başlar. Thales, tüm hayatını geçirdiği İyonya'yı arkasına almış ve Mısır'a gelmiştir. Tek amacı, ününü duyduğu o dev yapıyı bir de kendi gözleriyle görmektir. Firavun Keops'un 2000 yıl önce insanlığa acizliğini bildirmek için yaptırdığı, inşası 20 yıl süren, 100 bin işçinin birlikte çalıştığı dev bir yapı: Keops Piramidi!

Mısır içlerinde birkaç günlük yolculuktan sonra yorgun ve bitkin düşen Thales, nehir kıyısına yakın bir düzlükte yükselen yapıyı görünce birden canlanır. Hayal edebildiklerinin, düşlerinin ötesinde olan bu varlığı daha yakından görmek ister. Yürüdükçe adımları küçülür, piramit büyüdükçe büyür. Thales'in gözlerindeki dehşet, hayranlık, heyecan, hepsi birbirine karışmış duyguları fark eden bir Mısırlı, ona yaklaşır: ”Ey yabancı, şu an seni hayranlıklar içinde bırakan bu piramit ne kadar insanın ölümüne neden olmuştur bilir misin?” Thales Mısırlının yüzüne şaşkın şaşkın bakar. Mısırlı devam eder: “Firavun, insanı ölçen hiçbir ölçüyle ölçülemeyecek dev bir yapı inşa ederek insanlığa ne kadar çaresiz ve aciz olduğunu göstermek istedi. O devasa büyüklükteki yapıyla aramızda hiçbir benzer ölçü olmayacaktı, yapı gökyüzünde öylece yükselip giderken biz ardından sadece bakakalacaktık.” Thales daha önce de duymuştu bu tür söylemler. Piramidin yüksekliğini ölçmek imkânsızdı. Ona denk gelen hiçbir ölçü olmadığı için, piramit ölçülemezliğini sonsuza kadar koruyacaktı. Thales bu görüşe katılmıyordu. İnsanın



kendi elinden çıkan bir şey nasıl olur da onu ezebilir, nasıl olur da aciz bırakabilir, nasıl bir durum bu kadar kesin ve değişmez olabilirdi?

Ertesi sabah güneş Mısır'ı aydınlattığında Thales uzandığı yerden kalktı. Yürürken ardından gelen kendi gölgesine baktı. Bir süre sonra, elinde tuttuğu asasını toprağa dikerek dinlenmek için yere oturdu. Toprağa sokulduğunda asanın kendi boyundan uzun olan gölgesi, Güneş yükseldikçe giderek kısaldı, kısaldı ve asanın boyundan daha kısa hâle geldi. Demek ki gölgenin uzunluğu belirli bir anda asanın boyuna eşit olmuştu. "Gökyüzünde yükselen bu yapıyı devirip ölçemem belki ama, onun toprağa yapışmış zavallı gölgesini ölçebilirim. Elimle yapamadığımı aklımla yaparım." diye düşündü Thales. Güneş yeryüzündeki hiçbir nesneye ayrım yapmazdı. Kral, köleler, dev piramitler; hepsini aynı ölçüde etkilerdi. Asanın gölgesinin uzunluğu asanın kendi boyuna eşit olduğu anda, dev piramidin gölgesinin uzunluğu da kendi yüksekliğine eşit olacaktı. Çünkü Güneşten gelen ışınlar birbirine paraleldi. "Aklın gücü bu olsa gerek." diye düşündü. "Yüksekliğini ölçemiyorum çünkü gökyüzünde kaybolup gidiyor öyle mi? O zaman, yere düşen gölgesini ölçerim. Matematik de bu değil mi zaten? Erişilmezi erişilebilir, çözülmezi çözülebilir kılan akıl yolu..."

Ertesi sabah Thales bu ölçme işi için Mısırlıdan yardım istedi. Yere asasının boyu uzunluğunda bir çizgi çizdi ve asayı çizginin ucunda toprağa sapladı. Güneş yükselirken asanın gölgesi çizginin öbür ucuna denk geldiği anda bir ıslık çaldı ve Mısırlı da piramidin yerdeki gölgesinin tam uç noktasına (şekildeki C noktası) bir kazık çaktı. Thales o tarafa koşup bölme işlemine başladı.

Elinde kendi boyuna eşit uzunlukta bir ip vardı. İpin uzunluğuna 1 Thales dedi. Bu ipi kullanarak Mısırlının çaktığı kazığın piramidin taban kenarına olan uzaklığını ölçtü: 17 Thales.

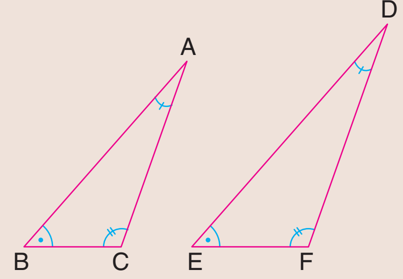
Artık ölçülebilir olarak gördüğü piramide bakarken Thales'in gözlerinde korku yoktu. 2500 yıldır kimsenin aklına getiremediğini akıl ederek problemin çözüm yolunu bulmuştu. Ölçtüğü cisim bir dikili taş olsaydı işi daha kolay olabilirdi ama, piramit ona biraz zorluk çıkarmıştı. İple ölçtüğü gölge yani BC uzunluğu, piramidin yüksekliğine eşit değildi. Daha ölçmesi gereken AB uzunluğu, yani piramidin taban kenar uzunluğunun yarısı vardı. Thales taban kenarını ölçtü ve elde ettiği değeri 2 ye böldü: 67 Thales. Gölge uzunluğu da 17 Thales olduğuna göre, toplam 84 Thales eder. İşte piramidin yüksekliğini ölçmüştü, günümüz birimine çevrildiğinde tam 147 metre!

Kaynak: *Bilim ve Teknik Dergisi (Ağustos 2004)*

(Yazar tarafından uyarlanmıştır.)

HATIRLAYALIM

- Karşılıklı açılarının ölçüleri eşit ve karşılıklı kenarlarının uzunlukları orantılı olan üçgenlere benzer üçgenler denir.



Şekildeki ABC ve DEF üçgenleri için aşağıdaki eşitlikler sağlansın.

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|CA|}{|FD|}$$

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$

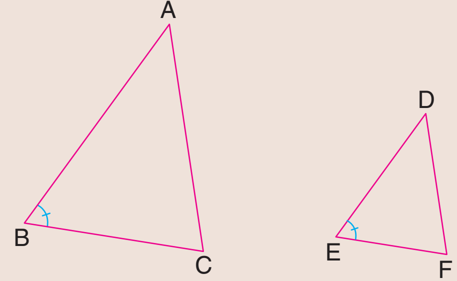
$m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$

$m(\widehat{C}) = m(\widehat{F})$

Bu durumda ABC ve DEF üçgenleri benzerdir ve bu benzerlik $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ biçiminde gösterilir.

$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ gösteriminde A ile D, B ile E ve C ile F köşeleri eşlenmiştir.

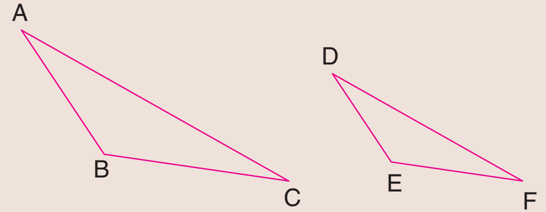
- İki üçgenin karşılıklı birer açılarının ölçüleri eşit ve bu açıların kenarlarını oluşturan karşılıklı ikişer kenarlarının uzunlukları orantılı ise bu üçgenler benzerdir. Yandaki şekilde



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|BC|}{|EF|} \\ m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) \end{array}\right\} \text{KAK benzerliği}$$

olduğundan $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ dir.

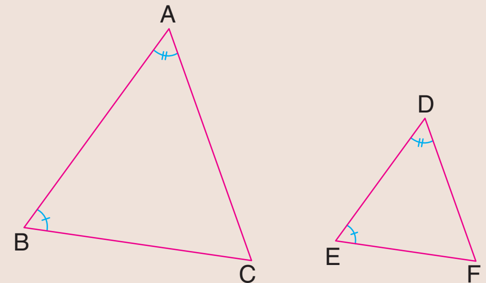
- İki üçgenin karşılıklı kenarlarının uzunlukları orantılı ise bu üçgenler benzerdir. Yandaki şekilde



$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|} \text{ KKK benzerliği}$$

olduğundan $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ dir.

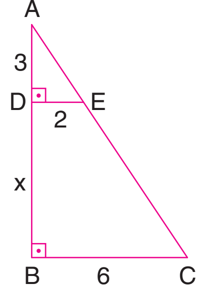
- İki üçgenin karşılıklı iki açısının ölçüleri eşit ise bu üçgenler benzerdir. Yandaki şekilde



$$\left.\begin{array}{l} m(\widehat{B}) = m(\widehat{E}) \\ m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) \end{array}\right\} \text{AA benzerliği}$$

olduğundan $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ dir.

ÖRNEK



Yandaki şekilde

$m(\widehat{ADE}) = 90°$

$m(\widehat{ABC}) = 90°$

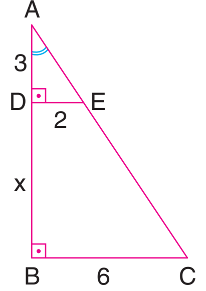
$|AD| = 3$ birim

$|DE| = 2$ birim

$|BC| = 6$ birim

olduğuna göre $|DB| = x$ kaç birimdir?

Çözüm



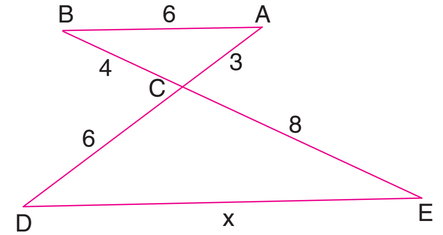
Şekilde A açısı hem ADE üçgeninin hem de ABC üçgeninin bir açısıdır. Ayrıca ADE üçgeninin D açısı ve ABC üçgeninin B açısı birer dik açıdır. ADE ve ABC üçgenlerinin karşılıklı ikişer açılarının ölçüleri eşit olduğundan bu iki üçgen AA kuralına göre benzerdir.

"Benzer iki üçgenin karşılıklı kenarları orantılıdır." önermesi gereğince aşağıdaki eşitliği yazabilir, $|DB| = x$ uzunluğunu bulabiliriz.

$$\widehat{ABC} \sim \widehat{ADE} \Rightarrow \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DE|} \Rightarrow \frac{|AB|}{3} = \frac{6}{2} \Rightarrow |AB| = \frac{18}{2} = 9$$

$|AB|$ uzunluğu 9 birim ise $|DB| = 9 - 3 = 6$ birim olur.

ÖRNEK



Yandaki şekilde

$|AB| = 6$ birim

$|BC| = 4$ birim

$|CA| = 3$ birim

$|CD| = 6$ birim

$|EC| = 8$ birim

olduğuna göre $|DE| = x$ kaç birimdir? Bulalım.

Çözüm

BCA ve ECD ters açılarının ölçüleri eşittir. Bu iki açıyı oluşturan kenarların uzunlukları orantılı mıdır? Bakalım.

$$\frac{|CA|}{|CD|} = \frac{|BC|}{|EC|} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ orantı sağlanıyor.}$$

ABC ve DEC üçgenleri KAK kuralına göre benzerdir. "Benzer iki üçgende karşılıklı kenarlar orantılıdır." önermesi gereğince aşağıdaki eşitlikleri yazabilir, x uzunluğunu hesaplayabiliriz.

$$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEC} \Rightarrow \frac{|CA|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|DE|} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = \frac{36}{3} = 12 \text{ birimdir.}$$

ÖRNEK

Yandaki şekilde

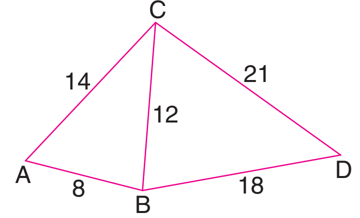
$|AB| = 8$ birim

$|BC| = 12$ birim

$|CA| = 14$ birim

$|BD| = 18$ birim

$|DC| = 21$ birim



olduğuna göre ABC ve CBD üçgenleri benzer midir? Araştıralım.

Çözüm

İki üçgenin de kenar uzunlukları verildiğine göre üçgenlerin karşılıklı kenarlarının uzunluklarının orantılı olup olmadıklarına bakalım. Karşılıklı kenarları nasıl seçelim?

Kenar uzunlukları bilinen bu iki üçgenin benzer olup olmadıklarını anlamak için iki üçgenin de kenar uzunluklarını küçükten büyüğe doğru sıralayalım. Orantıyı kurarken üçgenlerin küçük olan kenar uzunluklarını birbiriyle, büyük olan kenar uzunluklarını birbiriyle eşleyelim.

ABC üçgeninin kenar uzunlukları: 8, 12, 14

CBD üçgeninin kenar uzunlukları: 12, 18, 21

$$\Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{2}{3}, \quad \frac{12}{18} = \frac{2}{3}, \quad \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

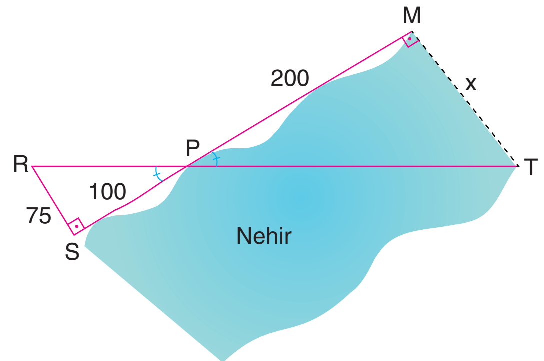
Karşılıklı kenarlarının uzunlukları oranı $\frac{2}{3}$ olduğu için KKK kuralına göre ABC ve CBD üçgenleri benzerdir. Bu benzerlik aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\widehat{ABC} \sim \widehat{CBD}$$

ÖRNEK

Yandaki şekil bir nehrin genişliğini ölçmek için yapılacak çalışmaları modellemektedir.

Şekildeki verilere göre nehrin $|MT|$ genişliğini hesaplayalım (Uzunluklar metre türündendir.).



Çözüm

$$\left.\begin{array}{l} m(\widehat{RSP}) = m(\widehat{TMP}) = 90^\circ \\ m(\widehat{SPR}) = m(\widehat{MPT}) \text{ (ters açılar)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \widehat{RSP} \sim \widehat{TMP} \quad \text{(AA kuralı)}$$

$$\Longrightarrow \frac{|RS|}{|TM|} = \frac{|SP|}{|MP|} \Longrightarrow \frac{75}{x} = \frac{100}{200}$$

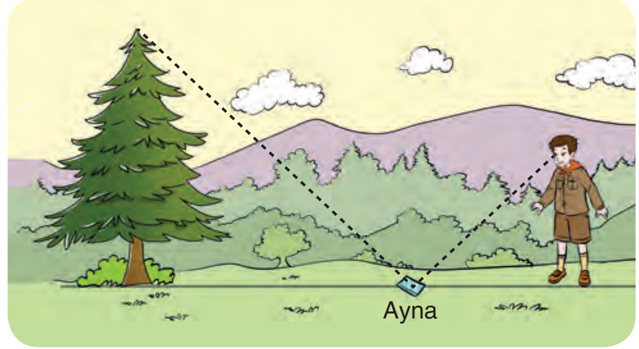
$$x = \frac{200 \cdot 75}{100}$$

$$x = 150$$

O hâlde nehrin genişliği 150 metredir.

ÖRNEK

Bir izci, ayna yardımıyla bir ağacın yüksekliğini ölçmek istemektedir. Yandaki resim bu durumu modellemektedir.



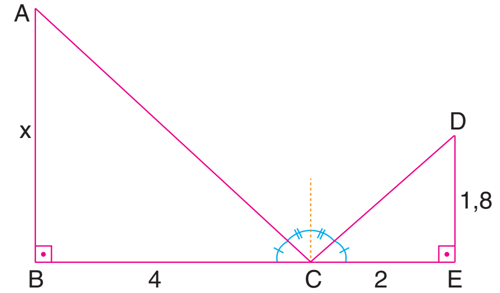
İzci, yere uygun biçimde yerleştirdiği aynada ağacın tepesini görmektedir. Aynanın ağaca olan uzaklığı 4 m, izcinin aynaya olan uzaklığı 2 m, izcinin boyu 1,8 m'dir. Buna göre ağacın yüksekliği kaç metredir? Bulalım.

Çözüm

Yandaki şekilde

$$m(\widehat{B}) = m(\widehat{E}) = 90°$$

$$m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{DCE}) \quad \text{(Yansıma Kanunu)}$$



Buna göre AA benzerlik kuralına göre $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{DEC}$ dir. "Benzer üçgenlerde karşılıklı kenarların uzunlukları orantılıdır." önermesi gereğince aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EC|} \Longrightarrow \frac{|AB|}{1,8} = \frac{4}{2}$$

$$|AB| = 1,8 \cdot 2$$

$$|AB| = 3,6$$

O hâlde ağacın yüksekliği 3,6 metredir.

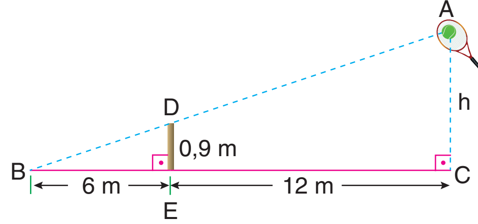
PROJE

Cetvel veya mezurayla doğrudan ölçemeyeceğiniz uzun bir nesne seçiniz. Bu dik bir kayalık, yüksek bir bina, okuldaki bayrak direği olabilir. Nesnenin gölgesi, ölçülebilecek bir şehir kesiminde, parkta veya görece düzlük bir alanda olmalıdır. Ölçümün günün hangi saatinde yapılacağı da önemlidir. Bu nedenle şehrin çeşitli yerlerinde, çeşitli saatlerde gözlem yapma ihtiyacı duyabilirsiniz. Gölgeler öğleye yakın zamanda en kısa duruma gelir.

Seçtiğiniz nesnenin gölgesinin boyunu ölçünüz. Yanında dururken kendi gölgenizin veya dik tutulmuş bir sopanın gölgesinin boyunu da ölçünüz. Kendi gölgenizi kullanacaksanız yanınızda bir yardımcı bulundurmanız ve boyunuzun ölçüsünü bilmeniz gerekecektir. Cetvel, kalem veya dinamik geometri programı kullanarak çizimler yapıp nesnenin boyunu benzer üçgenler yardımıyla bulunuz. Karşılaştığınız problemleri içeren bir açıklama yazınız. Hesaplarınızda kesin rakamlar kullanınız. Sonucu buluncaya kadar sayıları yuvarlamayınız.

ÖRNEK

Teniste servis kurallarına göre topu atan oyuncunun topu karşı sahada belli bir bölgenin dışına düşürmemesi gerekir. Aşağıdaki şekilde bir servis atışı modellenmiştir. C noktasında bulunan sporcu, topa $|CA| = h$ olacak biçimde A noktasında vurmuştur. Top, $[ED]$ ile gösterilen fileye takılmadan (hemen üstünden) geçerek B noktasına düşerse servis atışı, kurallara uygun olarak yapılmış sayılacaktır.



Şekildeki verilere göre sporcunun topa hangi yükseklikte vurması gerektiğini hesaplayalım.

Çözüm

Tenis topunun gidiş yolu olan AB'nin bir doğru parçası olduğunu varsayacağız. BED ve BCA üçgenleri B açıları ortak, E ve C açıları dik olduğundan AA benzerlik kuralına göre benzerdir.

"Benzer üçgenlerde karşılıklı kenarların uzunlukları orantılıdır." önermesi gereğince aşağıdaki eşitliği yazalım. Gerekli işlemleri yaparak h yüksekliğini bulalım.

$$\frac{|BE|}{|BC|} = \frac{|ED|}{|CA|} \Longrightarrow \frac{6}{6+12} = \frac{0,9}{h}$$

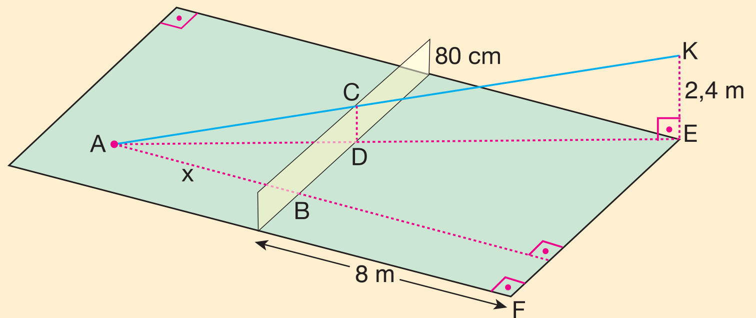
$$\Longrightarrow \frac{6}{18} = \frac{0,9}{h}$$

$$\Longrightarrow h = \frac{18 \cdot 0,9}{6}$$

$$\Longrightarrow h = 2,7 \text{ m}$$

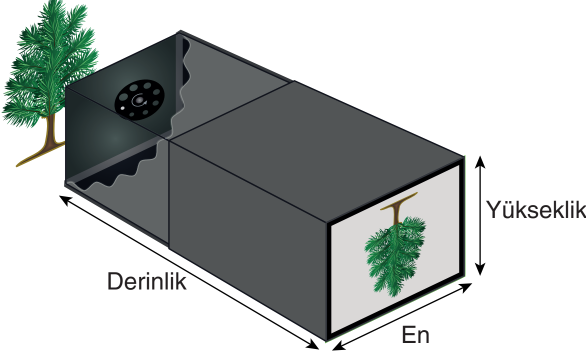
SIRA SİZDE

Bir tenis topu yerden 2,4 m yükseklikten atılıyor ve yüksekliği 80 cm olan fileye takılmadan (hemen üstünden) geçiyor. Atış yerinin fileden uzaklığı 8 m olduğuna göre topun yere çarptığı noktanın fileden uzaklığının ($|AB| = x$) kaç m olduğunu bulunuz.



ÖRNEK

İğne başı kamerası da denen kamera obskura, boş ve karanlık bir kutudur. Kutunun arkasında film bulunur. Filmin bulunduğu yüzeyin karşısında toplu iğne başı kadar küçük bir delik vardır. Başlangıçta kapalı olan bu delik, fotoğraf çekileceği zaman açılır. Delik açıldığında ışık filmin üzerine düşer ve görüntü fotoğrafa dönüşür.





Kamera obskura İtalyancada "karanlık oda" anlamına gelir.

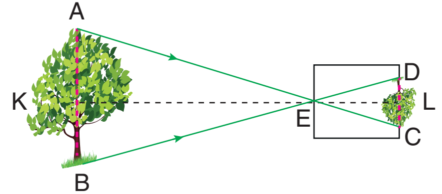
Bu kameranın arkasındaki filme düşen görüntü 3,5 cm boyunda olsun. Fotoğrafı çekilen nesne 10 m uzakta ve kamera kutusu 40 cm derinlikte olsun. Bu nesnenin (ağacın) boyunu bulalım.

Çözüm

Yandaki şekilde, $\widehat{ABE} \sim \widehat{CDE}$ dir.

$[EK]$ ve $[EL]$ doğru parçaları bu iki üçgenin yüksekliklerididir.

"Benzer iki üçgenin karşılıklı yüksekliklerinin uzunlukları oranı benzerlik oranına eşittir." önermesi gereğince aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.



$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|EK|}{|EL|}$$

Verilenlere göre,

$$|CD| = 3,5 \text{ cm}$$

$$|EK| = 1000 \text{ cm}$$

$$|EL| = 40 \text{ cm dir.}$$

Bu değerleri yukarıdaki eşitlikte yerlerine yazalım. Gerekli işlemleri yapalım ve $|AB|$ uzunluğunu bulalım.

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|EK|}{|EL|} \Rightarrow |AB| = \frac{|CD| \cdot |EK|}{|EL|}$$

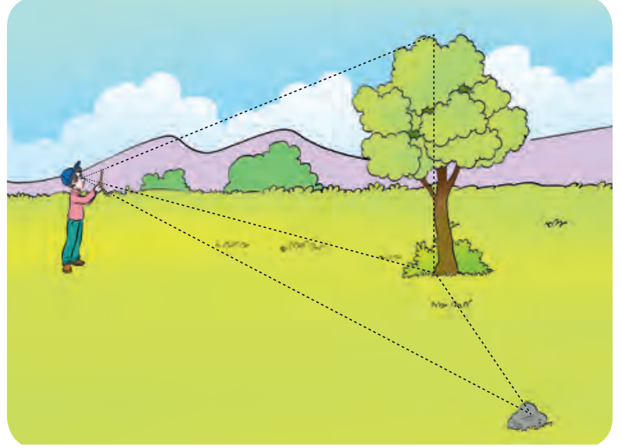
$$= \frac{3,5 \cdot 1000}{40}$$

$$= 87,5$$

Fotoğrafı çekilen nesnenin (ağacın) boyu 87,5 cm'dir.

ÖRNEK

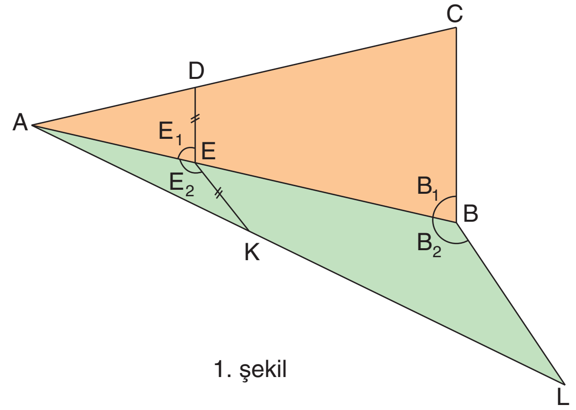
Bir ağacın boyunu ölçmek için elimizde yere dik olarak tuttuğumuz çubuk ile ağaca yaklaşarak veya ağaçtan uzaklaşarak çubuk ile ağacı aynı boyda görünceye kadar yürüyelim. Konumumuzu değiştirmeden çubuğun alt ucu sabit kalmak üzere çubuğu yere paralel hâle getirelim. Birinin yardımıyla çubuğun diğer ucunun gördüğü noktaya bir taş koyalım. Yandaki şekil bu durumu modellemektedir.



Taş ile ağaç arasındaki uzaklık ağacın boyuna eşittir. Açıklayalım.

Çözüm

Yandaki şekilde, $|ED|$ ve $|KE|$ çubuğun uzunluğuna eşit olduğundan $|ED| = |KE|$ dir (1. şekil).

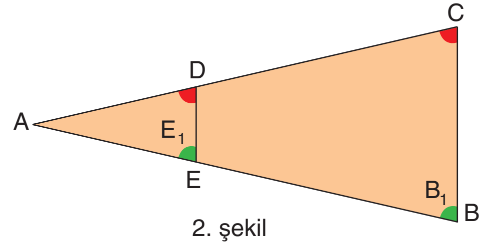


1. şekil

Ayrıca çubuğu yere dik tuttuğumuz için ED // BC dir (2. şekil).

$m(\widehat{D}) = m(\widehat{C})$ (yöndeş)

$m(\widehat{E_1}) = m(\widehat{B_1})$ (yöndeş)



2. şekil

Karşılıklı ikişer açılarının ölçüleri eşit olduğundan $\widehat{AED} \sim \widehat{ABC}$ dir.

Benzer iki üçgende karşılıklı kenarların uzunlukları orantılıdır.

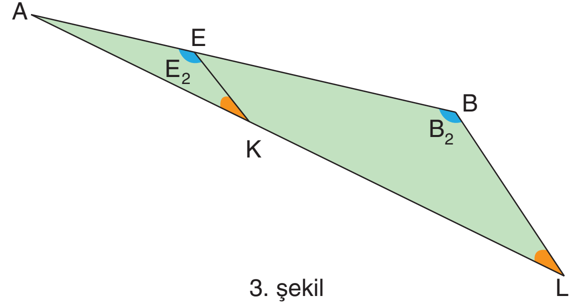
$$\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|ED|}{|BC|} \quad \text{..........................} \ (1)$$

Çubuğu yere paralel tuttuğumuz için $KE \parallel LB$ dir (3. şekil).

$$m(\widehat{E_2}) = m(\widehat{B_2}) \text{ (yöndeş)}$$

$$m(\widehat{K}) = m(\widehat{L}) \text{ (yöndeş)}$$

Karşılıklı ikişer açılarının ölçüleri eşit olduğundan $AKE \sim ALB$ dir. Benzer iki üçgende karşılıklı kenarların uzunlukları orantılıdır.



3. şekil

$$\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|KE|}{|LB|} \text{ .... } ②$$

① ve ② numaralı eşitliklerin sol tarafları eşit olduğundan sağ tarafları da eşittir.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{|AE|}{|AB|} = \dfrac{|ED|}{|BC|} \\ \\ \dfrac{|AE|}{|AB|} = \dfrac{|KE|}{|LB|} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{|ED|}{|BC|} = \frac{|KE|}{|LB|} \text{ .... } ③$$

Elde ettiğimiz ③ numaralı eşitlikteki kesirlerin payları eşittir $(|ED| = |KE|)$.

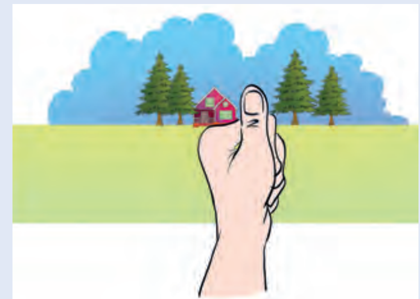
"Eşit iki kesrin payları eşitse paydaları da eşittir." önermesi gereğince $|BC| = |LB|$ olur. O hâlde $|LB|$ ile gösterdiğimiz taş ile ağaç arasındaki uzaklık $|BC|$ ile gösterdiğimiz ağacın boyuna eşittir.

PROJE

Düz bir arazide, uzaktaki bir evin bize olan uzaklığını ölçmek istiyoruz. Askerler bu işi aşağıdaki yöntemle yapmaktadır.

Yöntem: Yüzümüzü eve çevirip bir kolumuzu yere paralel ileri uzatalım. Daha sonra gözümüzün birini kapatarak açık gözümüzle, başparmağımız evin üstüne gelecek biçimde nişan alalım. Sonra duruşumuzu değiştirmeden diğer gözümüzle eve bakalım ve nişan alalım. Görüntü yandaki resimde olduğu gibi kayacaktır. Başparmağımızın ne kadar kaydığını tahmin edelim (Bu tahmin çok küçük hatalarla yapılabilmektedir.). Tahmin ettiğimiz sayıyı 10 ile çarpalım. Çıkan sayı evin bize olan uzaklığını verecektir.





Bir arkadaşınızdan yardım alarak;

- İki göz bebeğiniz arasındaki uzaklığı,
- Sağ gözünüz ile sağ el baş parmağınız arasındaki uzaklığı ölçünüz.

Bu uzaklıkların oranını bulunuz.

Yöntemde belirtilen 10 sayısı ile bulduğunuz oranı karşılaştırınız. Yöntemi benzer üçgenler yardımıyla modelleyiniz.

ÖRNEK

Aşağıda solda verilen fotoğraf, Kız Kulesi'nin 1 : 250 oranında küçültülmüş maketine aittir. Bu maketle ilgili olarak aşağıdaki uzunluklar bilinmektedir.

- Kulenin bayrak direğiyle birlikte yüksekliği 15 cm'dir.
- Binaların yer aldığı kapalı bölgenin boyutları $9\ \text{cm} \times 6\ \text{cm}$'dir.


1 : 250 ölçekli
Kız Kulesi maketi


Kız Kulesi

Buna göre;

a. Kulenin bayrak direğiyle birlikte gerçek yüksekliğini bulalım.

b. Binaların gerçekte kaç m^2 lik bir alanı kapladığını hesaplayalım.

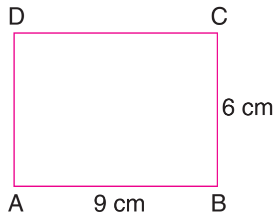
Çözüm

a. Kulenin gerçek yüksekliğine x diyelim. Kulenin yüksekliğinin 250 de 1 i 15 cm olduğundan aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$x \cdot \frac{1}{250} = 15 \Longrightarrow x = 15 \cdot 250$$
$$= 3750\ \text{cm}$$

O hâlde kulenin bayrak direğiyle birlikte gerçek uzunluğu 37,5 m'dir.

b. Binaların makette kapladığı alanı aşağıdaki gibi modelleyelim ve alanını yazalım.



$$A(ABCD) = 6 \cdot 9$$
$$= 54\ \text{cm}^2$$

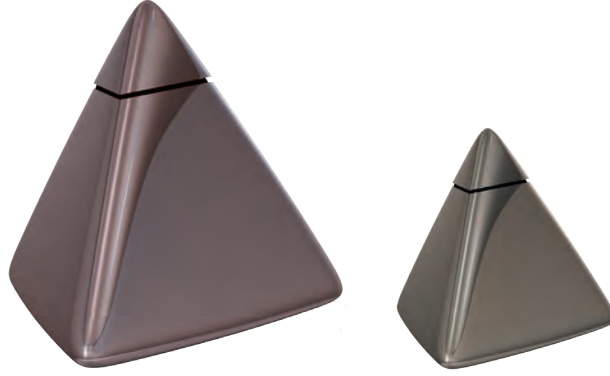
Binaların kapladığı gerçek alan y olsun. İki benzer şeklin alanları oranı benzerlik oranının (ölçeğin) karesine eşit olduğundan aşağıdaki eşitliği yazabilir, gerekli işlemleri yaparak binaların kapladığı alanı bulabiliriz.

$$\frac{54}{y} = \left(\frac{1}{250}\right)^2 \Longrightarrow y = 54 \cdot 250^2$$
$$= 54 \cdot 62\ 500$$
$$= 3\ 375\ 000\ \text{cm}^2$$

O hâlde Kız Kulesi'nde yer alan binaların kapladığı alan $337{,}5\ m^2$ dir.

ÖRNEK

Aşağıda düzgün dört yüzlü biçiminde, farklı hacimde olan, aynı markaya ait iki parfüm şişesi modellenmiştir. Büyük şişenin bir ayrıtının uzunluğu 10 cm, küçük şişenin bir ayrıtının uzunluğu 5 cm'dir.



Aynı marka olan bu iki şişe parfümden büyüğünün fiyatı 160 TL olduğuna göre küçüğünün fiyatının en az kaç TL olması beklenir? Bulalım.

Çözüm

Parfüm şişeleri birbirine benzer olan iki düzgün dört yüzlüdür. Düzgün dört yüzlünün dört yüzü de birbirine eş olan eşkenar üçgenlerden oluşur. Büyük şişenin bir yüzü bir kenarının uzunluğu 10 cm olan bir eşkenar üçgen, küçük şişenin bir yüzü bir kenarının uzunluğu 5 cm olan bir eşkenar üçgendir.

Bu iki eşkenar üçgenin benzerlik oranı $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ dir.

"Benzer iki cismin hacimleri oranı benzerlik oranının küpüne eşittir." önermesi gereğince bu iki cismin hacimleri oranını yazalım.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Yani küçük şişenin hacminin büyük şişenin hacmine oranı $\frac{1}{8}$ dir.

Küçük şişe parfümün fiyatı ise büyük şişe parfümün fiyatının en az $\frac{1}{8}$ i olmalıdır.

Buna göre küçük şişe parfümün fiyatının en az kaç TL olabileceğini yazalım.

$$\frac{160}{8} = 20$$

O hâlde küçük şişe parfümün fiyatı en az 20 TL olabilir.



Perakende satışlarda paketler küçüldükçe sunulan malın birim fiyatı artar. Bu nedenle küçük şişe parfümün fiyatının sorulduğu cümlede "en az" ifadesi kullanılmıştır.

BULMACA

Aşağıdaki internet adresine giriniz. https://www.geogebra.org/m/hQntdrZH

Oradaki değişik renkte parçalar yanda verilmiştir (1. şekil).

Bu sitedeki animasyon size parçaları kaydırma olanağını veriyor. Ekranınızda 2. şekildeki dik üçgeni oluşturunuz. Tabanı 13 br, yüksekliği 5 br olan bir şekil elde edeceksiniz. Bu şeklin ölçülerini dikkatlice kontrol ediniz.

Şimdi sarı ve kırmızı dik üçgenlerin yerlerini değiştiriniz. Sonra yeşil ve mavi parçaları dik üçgenlerin boşluğuna koyunuz. Ekranda 3. şekildeki dik üçgen gözükecektir. Bunun da ölçülerini kontrol ediniz. Önünüzde yine tabanı 13 br ve yüksekliği 5 br olan bir dik üçgen var ama alanı bir kare eksik.

Bunun nasıl olduğunu açıklayabilir misiniz?

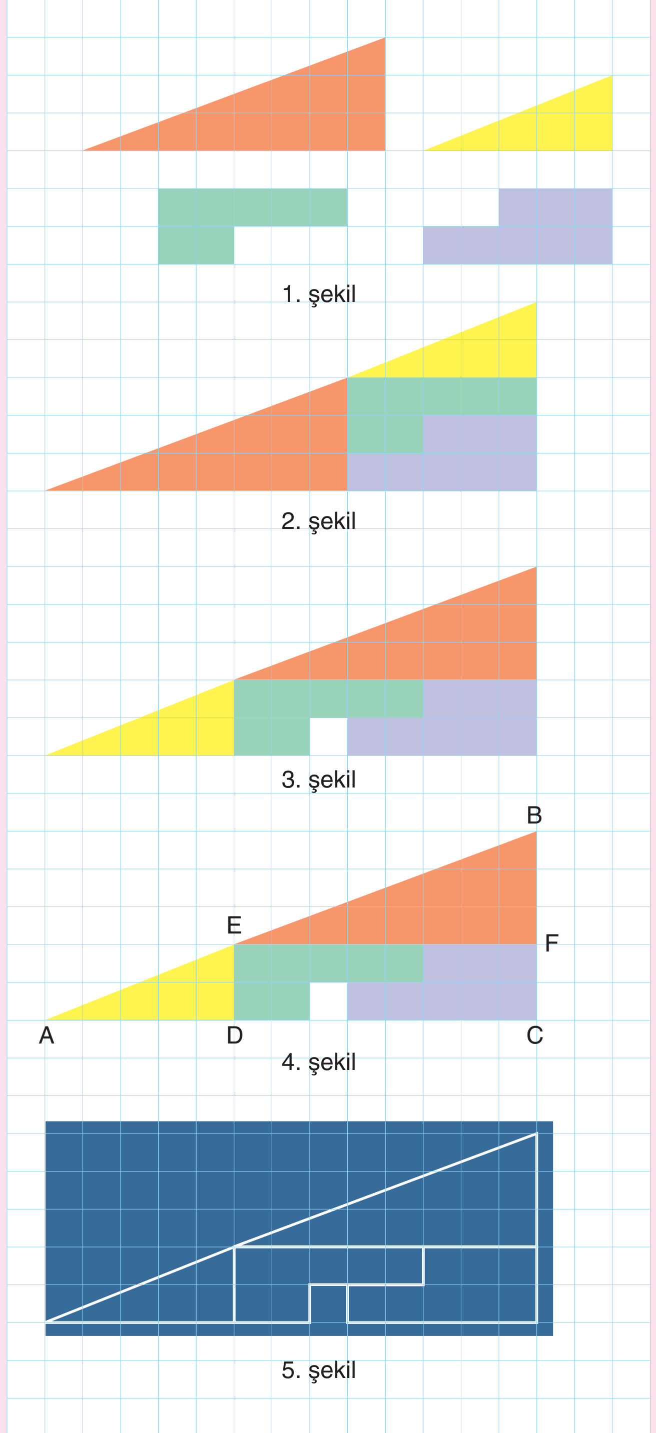
Eğer A, E ve B noktaları bir doğru üzerinde ise benzer üçgenlerin şartı olarak aşağıdaki eşitliklerin doğru olması gerekirdi.

$$\frac{|AD|}{|DE|} = \frac{|EF|}{|FB|} = \frac{|AC|}{|CB|}$$

Oysa eşitlikler geçerli değildir.

$$\frac{5}{2} \neq \frac{8}{3} \neq \frac{13}{5}$$

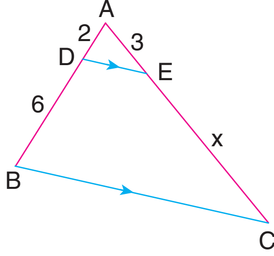
Bu sebepten A, E ve B noktalarının bir doğru üzerinde olmadığını anlıyoruz. E noktasında gözün kolaylıkla seçemediği bir kırıklık oluşuyor (5. şekil).



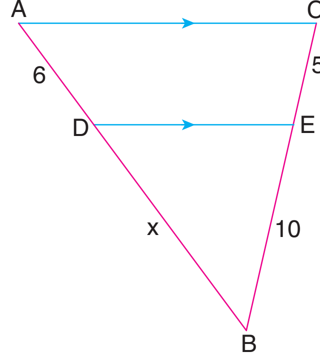
ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki şekillerde paralel doğrular mavi çizgiyle (ve üzerine konulan ok işaretiyle) belirtilmiş, kenar uzunlukları birim olarak şekil üzerinde verilmiştir. Buna göre x değerlerini bulunuz.

a.

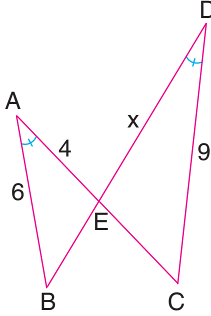


b.

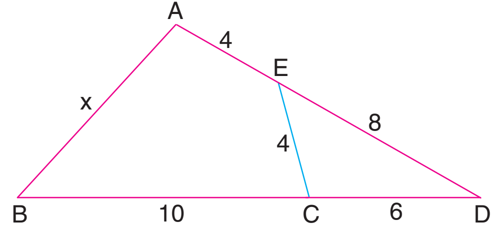


2. Aşağıdaki şekillerde verilenlerden yararlanarak x değerlerini bulunuz.

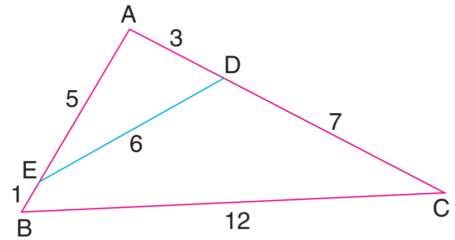
a.



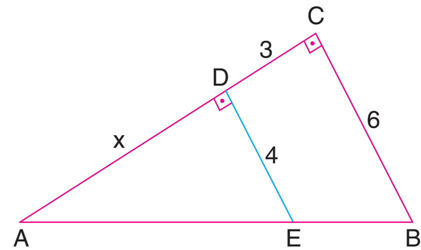
b.



3. Yandaki şekilde verilenlere göre ABC ve ADE üçgenlerinin benzer olup olmadığını belirtiniz.

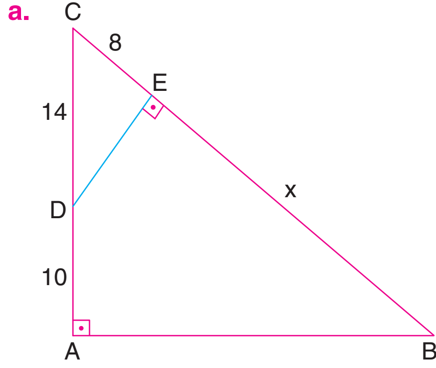


4. Yandaki şekilde verilenlere göre x değerini bulunuz.

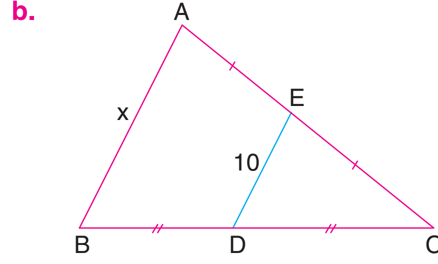


5. Aşağıdaki şekillerde verilenlere göre x değerini bulunuz.

a.



b.



6. Yandaki şekilde

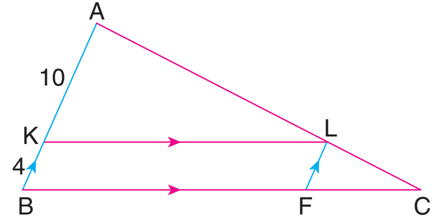
KL // BC

LF // AB

|AK| = 10 birim

|KB| = 4 birim

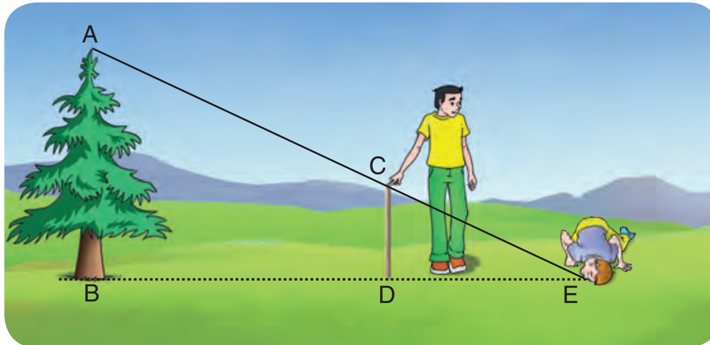
olduğuna göre aşağıdaki oranları bulunuz.



a. $\frac{|AL|}{|LC|}$ **b.** $\frac{|BF|}{|FC|}$ **c.** $\frac{|KL|}{|BC|}$

7. Ali ve Mehmet daha önce öğrendikleri "İzci Sopası Yöntemi" ile bir ağacın boyunu ölçmek istiyor. Ali şekildeki gibi bir E noktasından ağacın tepesine bakmak üzere yere yatıyor. Mehmet elindeki izci sopasını yere dik tutarak E noktasından itibaren ağaca doğru yürüyor. Ali izci sopasının ucu ile ağacın tepesini aynı hizada görünce Mehmet'e işaret ediyor ve Mehmet durarak izci sopasının ucunu toprağa çakıyor. Sopanın toprağa değdiği nokta D, ağacın gövdesinin toprağa değdiği nokta B olmak üzere |BD|, |DE| uzaklıklarını ve |CD| ile gösterilen izci sopasının uzunluğunu aşağıdaki gibi ölçüyorlar.

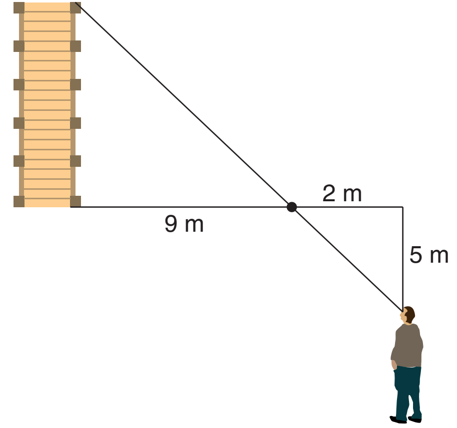
|BD| = 10 metre, |DE| = 1 metre ve |CD| = 0,8 metre



Buna göre ağacın |AB| boyunu bulunuz.

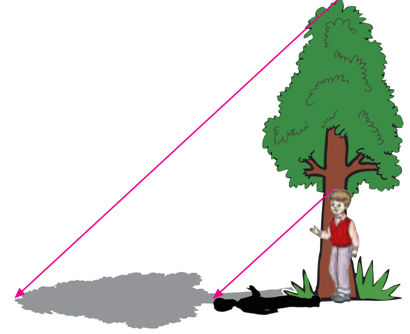
8. Berk, bir nehir üzerindeki köprünün uzunluğunu ölçmek istiyor. Bunun için önce nehir kıyısında köprünün bir ucundan düz bir doğru boyunca 9 metre yürüyor. Bulunduğu noktaya bir işaret koyuyor. Sonra aynı yönde 2 metre daha ilerliyor. Bu noktadan sonra, koyduğu işaret ile köprünün diğer ucu aynı hizaya gelene kadar köprüye paralel bir biçimde nehir kıyısından uzaklaşarak yürüyor.

Berk nehir kıyısından içeriye doğru 5 metre yürüdüğüne göre köprünün uzunluğunu bulunuz.

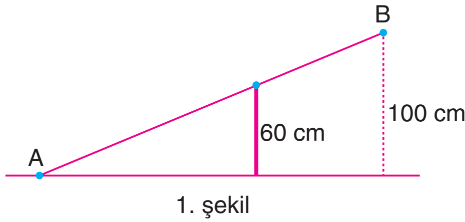


9. Can, bahçelerine diktiği bir ağacın boyunu ölçmek istiyor. Bunun için güneşli bir günde ağacın yanına geçiyor. Kendi gölgesinin ve ağacın gölgesinin uzunluğunu ölçüyor. Gölgesinin uzunluğunun ağacın gölgesinin uzunluğuna oranını $\frac{3}{8}$ buluyor.

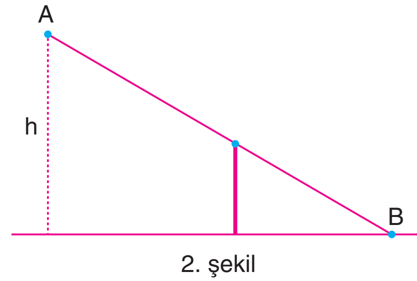
Can'ın boyu 150 cm olduğuna göre ağacın boyunu bulunuz.



10.



1. şekil



2. şekil

Dayanak noktası zeminden 60 cm yüksekte bulunan 1. şekildeki kaldıracın A ucu zemine dayandığında B ucu zeminden 100 cm yüksekte duruyor. Bu kaldıracın B ucu 2. şekildeki gibi zemine dayandığında A ucunun zeminden yüksekliğini bulunuz.

2. ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Yandaki şekilde,

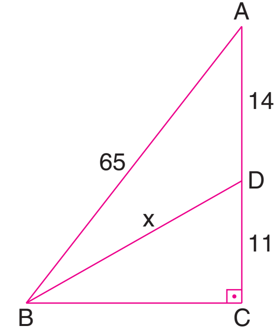
$m(\widehat{BCA}) = 90°$

$|CD| = 11$ birim

$|DA| = 14$ birim

$|AB| = 65$ birim

olduğuna göre $|BD| = x$ kaç birimdir?



A) 57 B) 59 C) 60 D) 61 E) 63

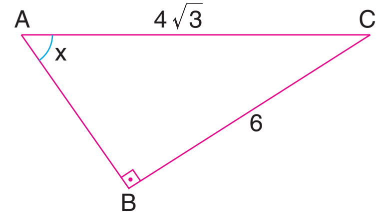
2. Yandaki şekilde,

$m(\widehat{ABC}) = 90°$

$|BC| = 6$ birim

$|CA| = 4\sqrt{3}$ birim

olduğuna göre $m(\widehat{CAB}) = x$ kaç derecedir?



A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 75°

3. Yandaki şekilde,

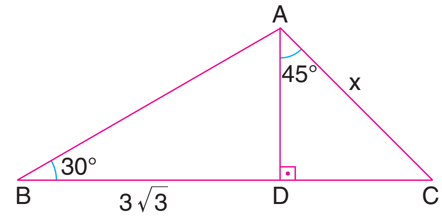
$m(\widehat{ADC}) = 90°$

$m(\widehat{ABC}) = 30°$

$m(\widehat{CAD}) = 45°$

$|BD| = 3\sqrt{3}$ birim

olduğuna göre $|CA| = x$ kaç birimdir?



A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

4. Dik koordinat düzleminde $A(4, 1)$ ve $B(2, 5)$ noktaları veriliyor. Buna göre A ve B noktaları arasındaki uzaklık kaç birimdir?

A) 3 B) $2\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{5}$ D) 5 E) 6

5. Dikdörtgen biçimindeki bir televizyon ekranının kenar uzunlukları 28 ve 45 cm'dir. Bu televizyon ekranının büyüklüğü yaklaşık olarak kaç inç'tir ($1 \text{ inç} = 2,54 \text{ cm}$)?

A) 15 B) 17 C) 19 D) 21 E) 23

6. İtfaiyeciler bir binanın 3. katında çıkan yangına müdahale edecekler. İtfaiyeciler yangın söndürme aracını, merdiveninin başlangıç noktası binadan 8 m uzakta olacak biçimde konumlandırıyor. Aracın merdivenini 13 m uzunluğa getirerek yangına tam karşısından 3 m yatay uzaklıktan müdahale ediyor.

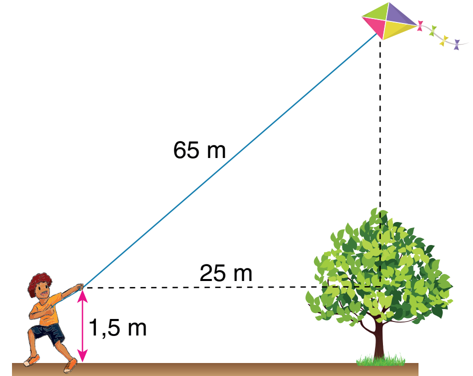


Buna göre yangına müdahale edilen yerin, aracın merdivenin başlangıç noktasına olan dikey uzaklığı kaç metredir?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

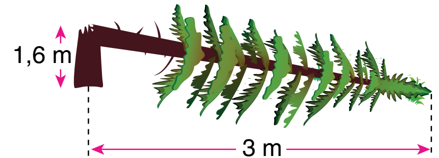
7. Barış, uçurtmasının ipini 65 m salıyor ve ipin ucunu yerden 1,5 m yüksekte gergin bir biçimde tutuyor. Bu durumda uçurtma 25 m ilerideki bir ağacın üstünde süzülüyor.

Buna göre, uçurtmanın yerden yüksekliği kaç metredir?



A) 58 B) 59,5 C) 61,5 D) 62 E) 63,5

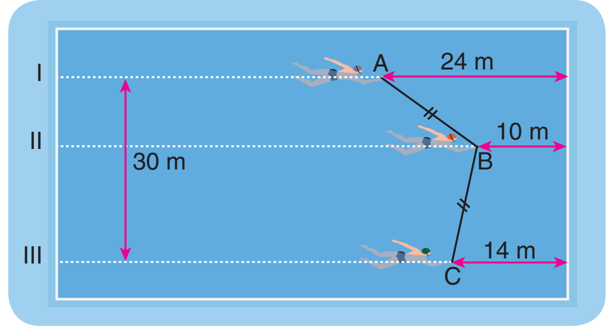
8. Gövdesinden kırılan bir ağacın toprak üstünde kalan kısmının uzunluğu 1,6 m ve ağacın tepesinin yere değdiği noktanın gövdesine olan uzaklığı 3 m'dir.



Buna göre ağacın kırılmadan önceki uzunluğu kaç metredir?

A) 5 B) 5,2 C) 5,6 D) 6 E) 6,3

9. A, B ve C sporcuları bir yüzme havuzunda sırasıyla I, II ve III. kulvarlarda yüzerek yarış yapmaktadır. Yarışın bir anında A, B ve C'nin bitiş çizgisine varmalarına sırasıyla 24, 10 ve 14 m vardır. Tam bu anda A ve C'nin B'ye olan uzaklıkları eşittir.



I ve III. kulvar arasındaki uzaklık 30 m olduğuna göre I ve II. kulvar arasındaki uzaklık kaç metredir?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 14

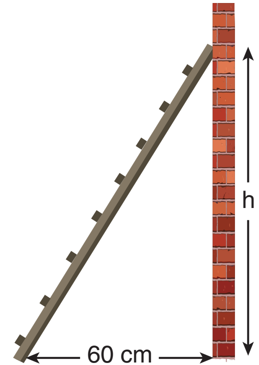
10. Arzu, Bora, Cenk ve Duru'nun düz bir alandaki konumlarıyla ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor.

- Arzu, Bora'nın 10 m kuzeyindedir.
- Cenk, Arzu'nun 8 m batısındadır.
- Duru, Bora'nın 16 m doğusundadır.

Buna göre Cenk ve Duru arasındaki en kısa uzaklık kaç metredir?

A) 25 B) 26 C) 27 D) 28 E) 29

11. Şekildeki gibi duvara yaslı biçimde duran bir merdivenin yerdeki ayağı duvardan 60 cm, duvardaki ayağı ise yerden h cm uzaklıktadır. Bu merdiven aşağı doğru bir miktar kaydıktan sonra duruyor. Bu durumda merdivenin yerdeki ayağının duvardan uzaklığı 100 cm oluyor ve duvardaki ayağının önceki konumuna göre 10 cm aşağıda olduğu görülüyor.



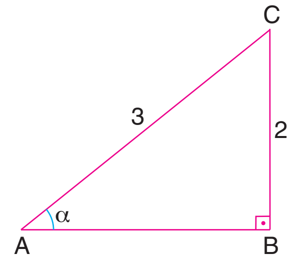
Buna göre h kaçtır?

A) 325 B) 340 C) 350 D) 365 E) 380

12. Bir ABC dik üçgeninde,

$m(\widehat{ABC}) = 90°$, $m(\widehat{CAB}) = \alpha$ ve $\sin\alpha = \frac{2}{3}$

olduğuna göre $\tan\alpha$ değeri kaçtır?



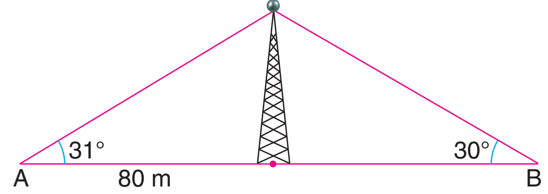
A) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ C) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

13. Bir okulun girişine engelli rampası yapılmıştır. Bu rampanın yüksekliği 0,75 m ve zeminle yaptığı açı 22° dir.

Buna göre rampanın uzunluğu yaklaşık kaç metredir $(\sin 22° \approx 0,375)$?

A) 1 B) 1,25 C) 1,5 D) 1,75 E) 2

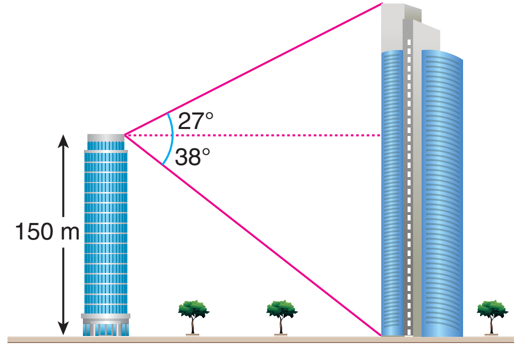
14. Düz bir zemin üzerine dikilen bir radyo vericisi bu zemindeki A ve B noktalarından halatlarla bağlanarak sabitlenmiştir. A ve B noktalarına bağlanan halatların zemin ile yaptıkları açıların ölçüleri sırasıyla 31° ve 30° dir.



A noktasının radyo vericisine uzaklığı 80 metre olduğuna göre B noktasına bağlanan halatın uzunluğu yaklaşık kaç metredir $(\tan 31° \approx 0,6,\ \sin 30° = 0,5)$?

A) 96 B) 100 C) 108 D) 112 E) 120

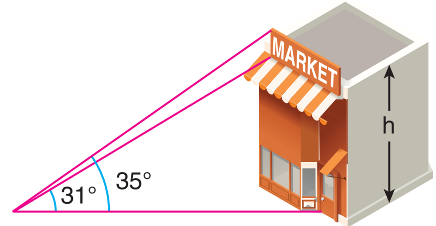
15. Eren, 150 m uzunluğundaki bir gökdelenin en üst katından karşıdaki gökdelene bakmaktadır. Bu durum yanda modellenmiştir.



Buna göre Eren'in baktığı gökdelenin uzunluğu yaklaşık kaç metredir $(\tan 38° \approx 0,78,\ \ \tan 27° \approx 0,5)$?

A) 224 B) 238 C) 246 D) 255 E) 263

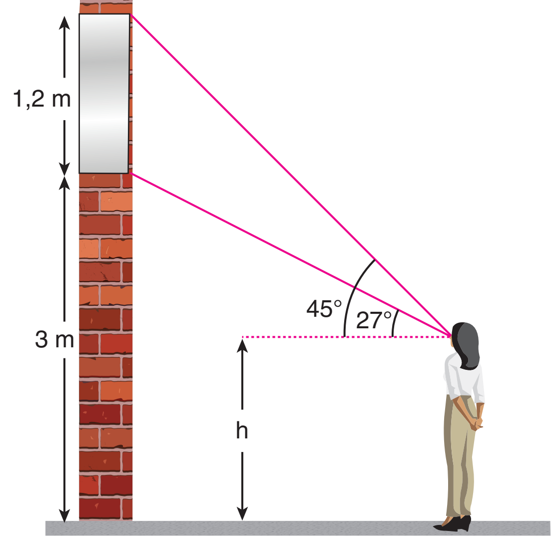
16. Bir marketin üst kısmında bulunan 60 cm genişliğindeki reklam tabelası yerdeki bir projektör tarafından aydınlatılmaktadır. Bu durum yanda modellenmiştir.



Buna göre market binasının yüksekliği (h) yaklaşık kaç cm'dir $(\tan 31° \approx 0,6,\ \ \tan 35° \approx 0,7)$?

A) 240 B) 270 C) 300 D) 350 E) 360

17. Ceren, 3 m yüksekliğindeki bir duvarın üzerindeki 1,2 m yüksekliğindeki bir pencereye bakmaktadır. Bu durum yanda modellenmiştir.



Buna göre Ceren'in göz hizasının yerden yüksekliği (h) yaklaşık kaç metredir $(\tan 27° \approx 0,5)$?

A) 1,68 B) 1,7 C) 1,72 D) 1,75 E) 1,8

18. Yandaki şekilde,

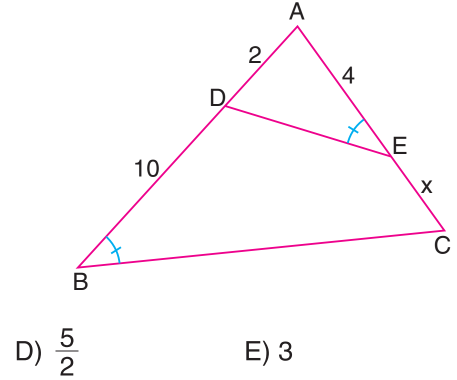
$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEA})$

$|AD| = 2$ birim

$|DB| = 10$ birim

$|EA| = 4$ birim

olduğuna göre $|CE| = x$ kaç birimdir?



A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

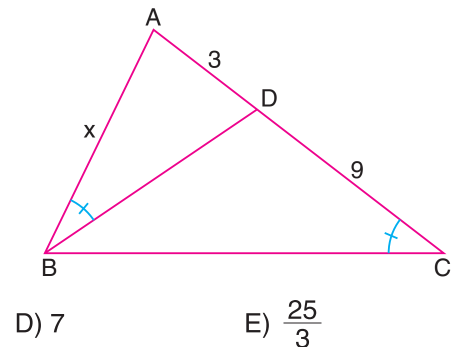
19. Yandaki şekilde,

$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{BCD})$

$|CD| = 9$ birim

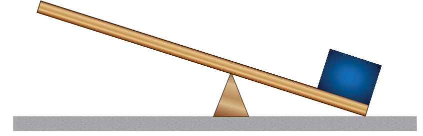
$|DA| = 3$ birim

olduğuna göre $|AB| = x$ kaç birimdir?



A) $\frac{9}{2}$ B) 5 C) 6 D) 7 E) $\frac{25}{3}$

20. Kaldıraçlar yardımıyla küçük kuvvetlerle büyük yükler kaldırılabilir.

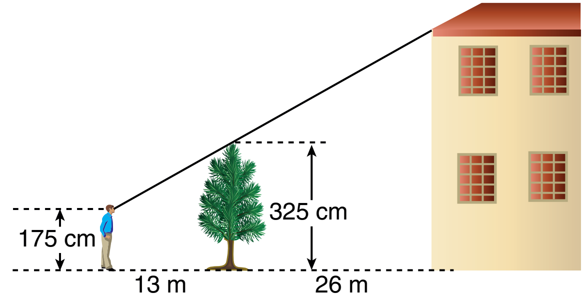


Şekilde 1 m uzunluğundaki bir kalas desteklenerek bir kaldıraç elde edilmiş ve bu kaldıracın bir ucuna yük konmuştur. Kalasın yere değen ucu ile destek arasındaki uzaklık 24 cm ve desteğin yüksekliği 7 cm'dir.

Buna göre kalasın diğer ucunun yerden yüksekliği kaç cm'dir?

A) 21 B) 25 C) 28 D) 32 E) 35

21. Mehmet, bir ağacın boyunu kullanarak bir binanın yüksekliğini ölçmek istiyor. Önce binadan ağaca doğru düz bir doğru boyunca ilerleyerek bu uzaklığı ölçüyor. Daha sonra, yüzünü binaya doğru dönerek ağacın ve binanın en üst noktalarını aynı hizada görene kadar aynı doğrultuda geri geri ilerliyor. Son olarak bulunduğu nokta ile ağaç arasındaki uzaklığı ölçüyor. Mehmet, bina ile ağaç arasındaki uzaklığı 26 m ve ağaç ile bulunduğu son nokta arasındaki uzaklığı 13 m ölçüyor.

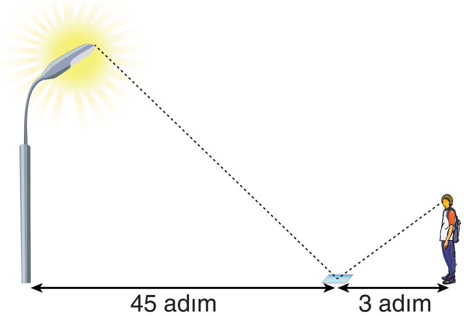


Mehmet'in göz hizası ile yer arasındaki uzaklık 175 cm ve ağacın boyu 325 cm olduğuna göre binanın yüksekliği kaç cm'dir?

A) 600 B) 625 C) 650 D) 675 E) 700

22. Kemal, bir futbol sahasındaki aydınlatma direğinin yerden yüksekliğini ölçmek istiyor. Direğe çıkmak tehlikeli olduğu için aşağıdaki yöntemi uyguluyor.

Direğe sırtını yaslayıp düz bir doğru boyunca 45 adım ilerliyor. Bulunduğu noktaya bir ayna koyuyor. Daha sonra direğe doğru dönüp aynaya bakarak aynı doğrultuda geri geri adım atıyor. Aynadan 3 adım uzaklaştığında direğin tepesini aynada görüyor.



Kemal'in göz hizası ile zemin arasındaki uzaklık 110 cm olduğuna göre direğin yerden yüksekliği kaç metredir?

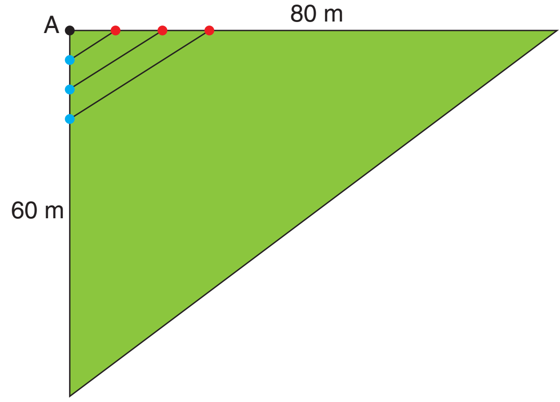
A) 16,5 B) 17 C) 17,5 D) 18 E) 18,5

23. Mine, evinin önünde çektirdiği bir fotoğrafta kendi gölgesini ve evinin gölgesini tam olarak görebiliyor. Evinin yüksekliğini belirlemek için kendisinin ve evinin gölge uzunluğunu fotoğraf üzerinde ölçüyor. Kendisinin ve evinin fotoğraftaki gölge uzunluklarını sırasıyla 2,7 cm ve 6,6 cm ölçüyor.

Mine'nin boyu 171 cm olduğuna göre evinin yüksekliği kaç cm'dir?

A) 376 B) 382 C) 398 D) 405 E) 418

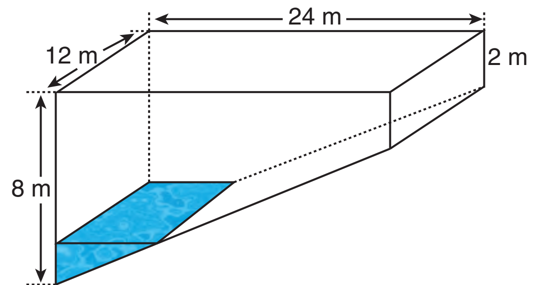
24. Dik kenarlarının uzunluğu 60 ve 80 metre olan dik üçgen biçimindeki bir bahçe yandaki biçimde ağaçlandırılıyor. Bahçenin dik kenarlarının kesiştiği A köşesine bir siyah direk dikiliyor. A köşesinden kısa kenar boyunca ilerlenerek her 6 metreye bir mavi direk, benzer biçimde uzun kenar boyunca ilerlenerek her 8 metreye bir kırmızı direk dikiliyor. Dikilme sıraları aynı olan mavi ve kırmızı direkler arasına birer ip çekiliyor. Çekilen ipler üzerinde 5 metre aralıklarla meyve ağacı, direklerin olduğu noktalara ise birer çam ağacı dikiliyor.



Buna göre bahçeye kaç ağaç dikilmiştir?

A) 110 B) 112 C) 115 D) 118 E) 121

25. Dikdörtgen biçimindeki bir yüzme havuzunun eni 12 metre, boyu ise 24 metredir. Bu yüzme havuzunun sığ kenarının derinliği 2 metre, derin kenarın derinliği ise 8 metredir. Boş olan bu yüzme havuzu derin kenarın derinliği 2 metre olacak kadar suyla dolduruluyor.

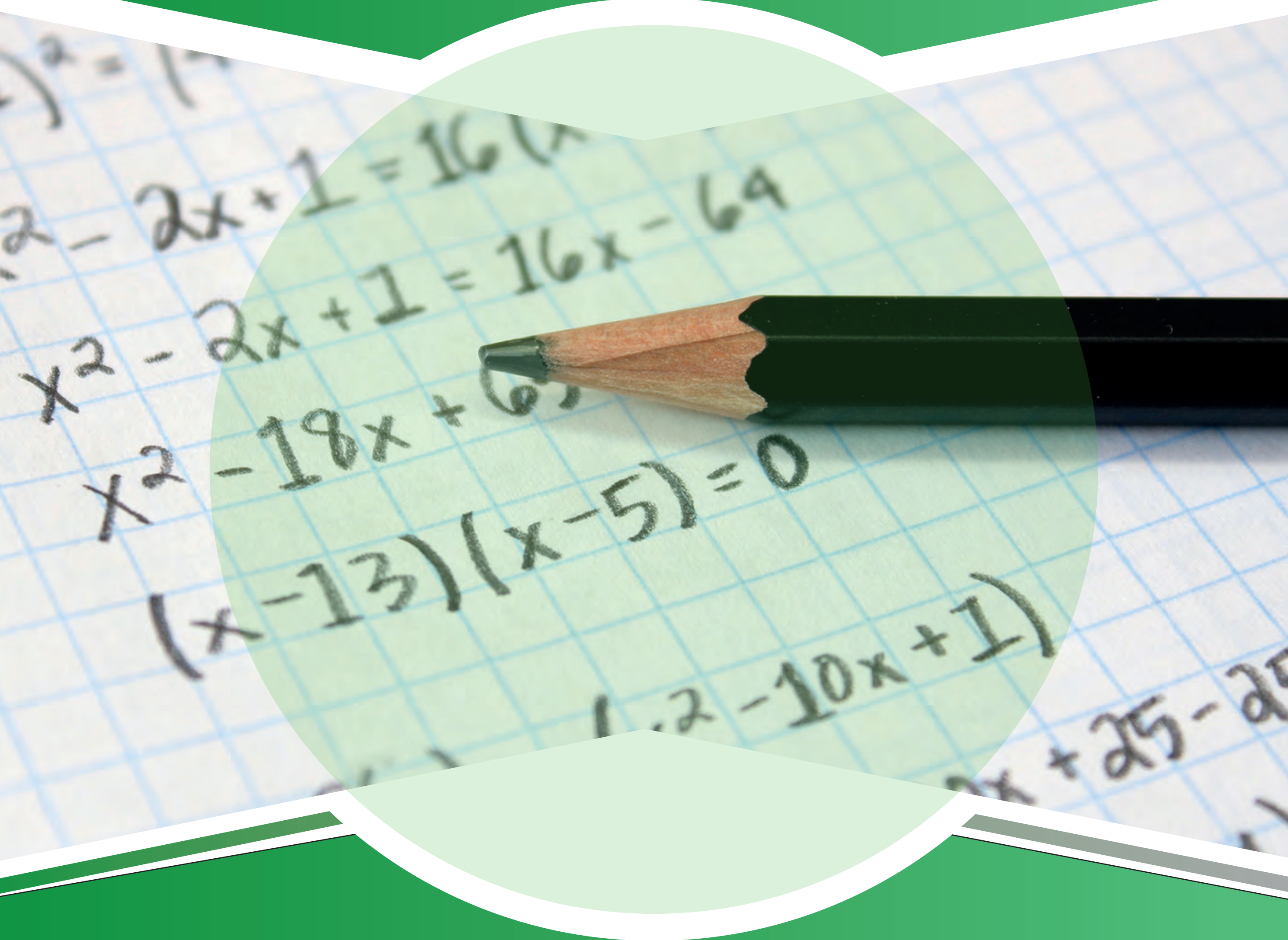


Bu durumda su yüzeyinin alanı kaç metrekaredir?

A) 90 B) 96 C) 100 D) 108 E) 112

3. ÜNİTE

DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER



BİRİNCİ DERECEDEN DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER

BİLİNÇLİ TÜKETİCİ ARİTMETİĞİ

HAZIR MIYIZ?

1. "Bir sayının 4 fazlası" ifadesi, x bilinmeyen bu sayıyı temsil etmek üzere "$x + 4$" biçiminde matematik diline çevrilir.

Aşağıda verilen ifadeleri matematik diline çeviriniz.

a. Bir sayının 8 eksiği

b. Bir sayının 5 katı

c. Bir sayının yarısı

ç. Bir sayının $\frac{3}{4}$ ü

d. Bir sayının 2 katının 3 fazlası

e. Bir sayının 3 katının 2 eksiğinin yarısı

f. Bir sayının 3 fazlasının 5 katı

2. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

a. $7 + x = 3$

b. $-12 = 3x + 4$

c. $10 - 2x = 11 - 3x$

ç. $\frac{2x}{3} - 2 = \frac{x}{2} + 1$

3. Aşağıdaki denklem sistemlerinin çözüm kümelerini bulunuz.

a. $\left.\begin{array}{r} 3x - 5y = -9 \\ 4x - y = 5 \end{array}\right\}$

b. $\left.\begin{array}{r} x + 4y - 3 = 0 \\ 2x - 3y - \frac{1}{2} = 0 \end{array}\right\}$

c. $\left.\begin{array}{r} -2x + y = 4 \\ x - 2y = 1 \end{array}\right\}$

4. "Erişkin bir insanın vücut sıcaklığı 36,5 °C ile 37 °C arasındadır." ifadesi, t erişkin bir insanın vücut sıcaklığını temsil etmek üzere "$36,5 < t < 37$" biçiminde matematik diline çevrilir.

Aşağıda verilen ifadeleri matematik diline çeviriniz.

a. Havuzun derinliği 2 metreden azdır.

b. Cep telefonunun fiyatı en az 200 TL'dir.

c. Ayşe bir günde en az 50, en çok 70 matematik problemi çözmektedir.

ç. Ali her gün en az 30 sayfa kitap okumaktadır.

d. Bisikletin fiyatı 200 TL'den fazla, 300 TL'den azdır.

e. Depo en fazla 50 litre su almaktadır.

f. Şubat ayında hava sıcaklığı -12 °C ile 8 °C arasında olmuştur.

5. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

a. $5 + x > 7$

b. $3x + 2 \leq 9$

c. $3x + 7 < x + 13$

ç. $\frac{3x}{4} - 4 \geq \frac{x}{3} + 1$

6. Bir öğrencinin ulaşım, beslenme, kırtasiye vb. masraflarını düşünerek okula gittiği bir günde harçlığını nasıl harcaması gerektiğini planlayınız.

1. BÖLÜM BİRİNCİ DERECEDEN DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER

Birinci Dereceden Denklemlerle İlgili Problemler



Emre, evinde balık besliyor. Her gün akvaryumunun bakımını yapıyor. Ancak bir süre sonra balıkların sayısı artıyor ve bakımı güçleşiyor. Balıklarının bir kısmını arkadaşlarına hediye edebileceğini düşünüyor. Emre, balıklarını dört yakın arkadaşına aşağıdaki biçimde paylaştırıyor.

- Balıkların sayısının 1 fazlasının yarısı kadar balığı Mutlu'ya veriyor.
- Kalan balıkların sayısının 1 fazlasının üçte biri kadar balığı Beren'e veriyor.
- Kalan balıkların sayısının 1 fazlasının dörtte biri kadar balığı Zeynep'e veriyor.
- Kalan balıkların sayısının 1 fazlasının beşte biri kadar balığı Efe'ye veriyor.

Sonunda Emre'nin akvaryumunda 11 balık kalıyor.

Buna göre Emre'nin arkadaşlarına paylaştırmadan önce başlangıçta akvaryumunda kaç balık vardı? Bulmaya çalışınız.

HATIRLAYALIM

İçinde bilinmeyen bulunan eşitliklere denklem denir. Eşitliği sağlayan bilinmeyenlere denklemin kökü, köklerden oluşan kümeye de denklemin çözüm kümesi adı verilir.

Denklemler, bilinmeyen sayısı ve bilinmeyenin en büyük derecesine göre isimlendirilir.

Örneğin

- $3x + 5 = 7$ 1. dereceden bir bilinmeyenli,
- $9x^2 + x = 3$ 2. dereceden bir bilinmeyenli,
- $3x + 2y = 5$ 1. dereceden iki bilinmeyenli,
- $5x^2 + 2y = 2$ 2. dereceden iki bilinmeyenli bir denklemdir.

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax + b = 0$ birinci dereceden bir bilinmeyenli denkleminde;

1. $a \neq 0$ ise denklemin bir kökü vardır. $Ç = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$

2. $a = 0$ ve $b = 0$ ise denklemin sonsuz kökü vardır. Tüm gerçek sayılar denklemi sağlar. $Ç = \mathbb{R}$

3. $a = 0$ ve $b \neq 0$ ise denklemin kökü yoktur. Çözüm kümesi boş kümedir. $Ç = \varnothing$

a, b ve c gerçek sayılar ve $a \neq 0,\ b \neq 0$ olmak üzere,

$$ax + by + c = 0$$

biçimindeki bir denkleme birinci dereceden iki bilinmeyenli bir denklem denir. Denklemde a ve b katsayılar, c sabit sayı, x ve y de bilinmeyenlerdir. Bu denklemi sağlayan tüm (x, y) sıralı ikililerinin oluşturduğu kümeye denklemin çözüm kümesi denir. Denklemin çözüm kümesi sıralı ikililerden oluşan sonsuz bir kümedir. Böyle bir denklem, analitik düzlemde bir doğru belirtir.

ÖRNEK

Aşağıdaki denklemleri çözelim.

a. $3x + 2 = x + 5$

b. $\frac{x}{2} - 2 = \frac{x}{3} + 1$

c. $3(x - 3) - 2x = x - 10$

ç. $2(x - 1) + x + 5 = 3(x + 1)$

Çözüm

a. $3x + 2 = x + 5$ (x'li terimleri eşitliğin soluna, diğer değerleri eşitliğin sağına geçirelim.)

$3x - x = 5 - 2$ (Gerekli işlemleri yapalım.)

$2x = 3$ (Eşitliğin her iki tarafını 2 ile bölelim.)

$x = \frac{3}{2}$

Verilen denklemin bir kökü vardır. Çözüm kümesi $Ç = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ dir.

b. $\frac{x}{2} - 2 = \frac{x}{3} + 1$ (x'li terimleri eşitliğin soluna, diğer değerleri eşitliğin sağına geçirelim.)

$\underset{(3)}{\frac{x}{2}} - \underset{(2)}{\frac{x}{3}} = 2 + 1$ (Eşitliğin solundaki kesirlerin paylarını eşitleyelim.)

$\frac{3x}{6} - \frac{2x}{6} = 2 + 1$ (Gerekli işlemleri yapalım.)

$\frac{x}{6} = 3$ (Eşitliğin her iki tarafını 6 ile çarpalım.)

$x = 18$

Verilen denklemin bir kökü vardır. Çözüm kümesi $Ç = \{18\}$ dir.

c. $3(x - 3) - 2x = x - 10$ (Çarpma işleminin toplama işlemi üzerinde dağılma özelliğini kullanalım.)

$3x - 9 - 2x = x - 10$ (x'li terimleri eşitliğin soluna, diğer değerleri eşitliğin sağına geçirelim.)

$3x - 2x - x = -10 + 9$ (Gerekli işlemleri yapalım.)

$0 = -1$

Bu durumda hiç bir gerçek sayı denklemi sağlamaz. Denklemin çözüm kümesi boş kümedir. Denklemin çözüm kümesi sembolle $Ç = \{\ \}$ ya da $Ç = \varnothing$ biçiminde gösterilir.

ç. $2(x - 1) + x + 5 = 3(x + 1)$ (Çarpma işleminin toplama işlemi üzerinde dağılma özelliğini kullanalım.)

$2x - 2 + x + 5 = 3x + 3$ (Gerekli işlemleri yapalım.)

$3x + 3 = 3x + 3$ (x'li terimleri eşitliğin soluna, diğer değerleri eşitliğin sağına geçirelim.)

$3x - 3x = 3 - 3$ (Gerekli işlemleri yapalım.)

$0 = 0$

Bu durumda her gerçek sayı denklemi sağlar. Her gerçek sayı denklemin bir köküdür. Denklemin çözüm kümesi gerçek sayılar kümesidir. Denklemin çözüm kümesi sembolle $Ç = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ ya da $Ç = \mathbb{R}$ biçiminde gösterilir.

SIRA SİZDE

Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a. $3x + 7 = x + 11$

b. $2(x - 1) = 2x + 5$

c. $5x + 2 = 3(x + 1) + 2x - 1$

ÖRNEK

$12(x-1)+10=-3ax$ denkleminin çözüm kümesi boş küme ise a kaçtır? Bulalım.

Çözüm

x'li terimleri eşitliğin soluna, diğer değerleri eşitliğin sağına geçirerek verilen denklemi düzenleyelim.

$$12(x-1)+10=-3ax$$
$$12x-12+10=-3ax$$
$$12x+3ax=12-10$$
$$(12+3a)x=2$$

Denklemin son hâlinde x'li terimin katsayısı yani $12+3a$ sayısı sıfıra eşitse denklemin çözüm kümesi boş kümedir.

$$12+3a=0 \Rightarrow 3a=-12 \Rightarrow a=-4$$

O hâlde $a=-4$ tür.

ÖRNEK

Hangi sayının 2 eksiğinin 3 katı 45 eder? Bulalım.

Çözüm

Aradığımız sayı x olsun.

x'in 2 eksiği $x-2$,

x'in 2 eksiğinin 3 katı $3(x-2)$ olur.

Verilenlere göre aşağıdaki eşitliği yazabilir, x'i bulabiliriz.

$$3(x-2)=45$$
$$3x-6=45$$
$$3x=45+6$$
$$3x=51$$
$$x=17$$

ÖRNEK

Ardışık üç doğal sayının toplamı 126 dır. En küçük sayı kaçtır? Bulalım.

Çözüm

En küçük sayı x olsun. Bu durumda ortanca sayı $x+1$ ve en büyük sayı $x+2$ olur.

Bu sayıların toplamını yazalım, gerekli işlemleri yaparak x'i bulalım.

$$x+(x+1)+(x+2)=126$$
$$3x+3=126$$
$$3x=123$$
$$x=41$$

O hâlde en küçük sayı 41 dir.

SIRA SİZDE

Ardışık üç çift doğal sayının toplamı 132 dir. En büyük sayı kaçtır?

ÖRNEK

Toplamları 45 olan iki sayıdan büyük olan sayı, küçük olan sayının 2 katından 9 fazladır. Buna göre küçük sayı kaçtır? Bulalım.

Çözüm

Küçük sayı x, büyük sayı y olsun.

Bu iki sayının toplamı 45 olduğuna göre aşağıdaki denklemi yazabiliriz.

$x + y = 45$ .... ①

Büyük sayı küçük sayının 2 katından 9 fazla olduğuna göre aşağıdaki denklemi yazabiliriz.

$y = 2x + 9$ .... ②

② numaralı denklemdeki y değerini ① numaralı denklemde yerine yazalım.

$$x + y = x + 2x + 9 = 45$$
$$3x = 45 - 9$$
$$3x = 36$$
$$x = 12$$

O hâlde küçük sayı 12 dir.

SIRA SİZDE

Son örnekte büyük sayı kaçtır? Bulunuz.

ÖRNEK

$\left.\begin{array}{l} 3x - y + 5 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{array}\right\}$ denklem sistemini çözelim.

Çözüm

$3x - y + 5 = 0 \Rightarrow 6x - 2y + 10 = 0$ (1. denklemin her iki tarafını 2 ile çarpalım.)

$x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow + \quad x + 2y - 3 = 0$ (2. denklemi aynen alalım.)

$7x + 7 = 0$ (Her iki denklemi taraf tarafa toplayalım.)

$$7x = -7$$
$$x = -1$$

$x = -1$ değerini, verilen iki denklemden herhangi birinde yerine yazalım ve y değerini bulalım.

$3x - y + 5 = 0 \Rightarrow 3(-1) - y + 5 = 0$

$-3 - y + 5 = 0 \Rightarrow y = 2$

Denklem sisteminin çözüm kümesi $Ç = \{(-1, 2)\}$ dir.

SIRA SİZDE

$x = -1$ ve $y = 2$ değerlerini yukarıda verilen denklem sistemindeki denklemlerde yerine koyarak denklemlerin sağlandığını görünüz.

ÖRNEK



Bazı diyetisyenler insanların ideal vücut ağırlığını hesaplamak için aşağıdaki formülü kullanmaktadır.

$$x = (y - 100) \cdot 0,9$$

Bu formülde "x" kilogram olarak ideal vücut ağırlığını, "y" de santimetre olarak boy uzunluğunu göstermektedir.

Bu formüle göre, boyu 180 cm ve ağırlığı 90 kg olan bir kişi kaç kg zayıfladığında ideal vücut ağırlığına ulaşır? Bulalım.

Çözüm

Boyu 180 cm olan bir kişinin ideal vücut ağırlığını bulalım. Bunun için formülde y yerine 180 yazalım.

$$\begin{aligned} x &= (y - 100) \cdot 0,9 \\ x &= (180 - 100) \cdot 0,9 \\ x &= 80 \cdot 0,9 \\ &= 72 \end{aligned}$$

Kişi 90 kg olduğu için aşağıdaki çıkarma işlemini yaparak kişinin vermesi gereken ağırlığı bulalım.

$$90 - 72 = 18$$

Kişi 18 kg zayıfladığında ideal vücut ağırlığına ulaşır.

ÖRNEK

Klor oranı %25 olan 50 litre klorlu su karışımının klor oranını %10 a indirmek için karışıma kaç litre saf su eklenmelidir? Bulalım.

Çözüm

Eklememiz gereken saf su miktarı x litre olsun.

50 litre suda bulunan klor miktarı: $50 \cdot \frac{25}{100} = 12,5$ litre

50 litre klorlu su karışımına x litre saf su eklendiğinde oluşan yeni karışımın miktarı: $50 + x$ litre

Elde edilen yeni karışımdaki klor oranı: $\frac{12,5}{50 + x}$

Elde ettiğimiz son karışımda klor oranının %10 olmasını istediğimizden aşağıdaki eşitliği yazabilir, x değerini bulabiliriz.

$$\begin{aligned} \frac{12,5}{50 + x} = \frac{10}{100} \quad &\Rightarrow \quad \frac{12,5}{50 + x} = \frac{1}{10} \\ &\Rightarrow \quad 50 + x = 125 \\ &\Rightarrow \quad x = 125 - 50 \\ &\qquad\quad x = 75 \end{aligned}$$

O hâlde karışıma 75 litre saf su eklenmelidir.

ÖRNEK

Bir markette sabunlar altışarlı ve dörderli paketler hâlinde satılmaktadır. Altılı paketler içindeki bir sabunun fiyatı, dörtlü paket içindeki bir sabunun fiyatından %10 daha ucuza gelmektedir. Altılı paketin fiyatı, dörtlü paketin fiyatından 3,5 lira fazla olduğuna göre dörtlü paketin satış fiyatı kaç liradır? Bulalım.

Çözüm

Dörtlü paketin satış fiyatı x lira olsun.

Altılı paketin satış fiyatı $x+3,5$ lira,

Dörtlü paketteki bir sabunun fiyatı $\frac{x}{4}$ lira,

Altılı paketteki bir sabunun fiyatı $\frac{x+3,5}{6}$ olur.

"Altılı paket içindeki bir sabunun fiyatı, dörtlü paket içindeki bir sabunun fiyatından %10 ucuzdur." bilgisinin matematik cümlesini yazalım ve x i bulalım.

$$\frac{x}{4}\cdot\frac{90}{100}=\frac{x+3,5}{6}$$ (%10 ucuz demek %90 ına eşit demektir.)

$$\frac{9x}{40}=\frac{x+3,5}{6}$$ (İçler dışlar çarpımı yapalım.)

$$9x\cdot 6=40x+140 \Rightarrow 54x-40x=140 \Rightarrow 14x=140 \Rightarrow x=10$$

Dörtlü paketin satış fiyatı 10 liradır.

ÖRNEK

Bir turist grubundaki erkek ve kadınların sayıları eşittir. Erkeklerin %40 ı ve kadınların %50 si Almandır. Turist grubunda 72 Alman olduğuna göre toplam kaç kişi vardır? Bulalım.



Çözüm

Turist grubundaki kişi sayısı x olsun.

Turist grubundaki erkeklerin sayısı $\frac{x}{2}$,

Turist grubundaki kadınların sayısı $\frac{x}{2}$ olur.

Alman erkeklerin sayısı $\frac{x}{2}\cdot\frac{40}{100}=\frac{x}{5}$,

Alman kadınların sayısı $\frac{x}{2}\cdot\frac{50}{100}=\frac{x}{4}$ olur.

Verilen bilgiye göre aşağıdaki eşitliği yazabilir x değerini bulabiliriz.

$$\underset{(4)}{\frac{x}{5}}+\underset{(5)}{\frac{x}{4}}=72$$ (Alman erkek ve kadınların toplam sayısı 72 dir.)

$$\frac{4x+5x}{20}=72$$

$$4x+5x=20\cdot 72 \Rightarrow 9x=20\cdot 72 \Rightarrow x=20\cdot 8 \Rightarrow x=160$$

Turist grubunda 160 kişi vardır.

ÖRNEK

$\frac{3}{7}$ si su ile dolu bir kaba 36 litre daha su konuyor. Bu durumda kabın dolu kısmının hacmi, boş kısmının hacminin 3 katına eşit oluyor. Buna göre kabın hacmi kaç litredir? Bulalım.

Çözüm

Kabın hacmi x litre olsun.

İlk durumda kabın dolu kısmının hacmi $\frac{3x}{7}$ litre, boş kısmının hacmi $\frac{4x}{7}$ litre olur.

Kaba 36 litre su konursa dolu kısmının hacmi $\frac{3x}{7}+36$, boş kısmının hacmi $\frac{4x}{7}-36$ litre olur.

Son durumda kabın dolu kısmının hacmi, boş kısmının hacminin 3 katına eşit olduğundan aşağıdaki eşitliği yazabilir, x değerini bulabiliriz.

$$3\left(\frac{4x}{7}-36\right)=\frac{3x}{7}+36$$
$$\frac{12x}{7}-3\cdot 36=\frac{3x}{7}+36$$
$$\frac{12x-3x}{7}=3\cdot 36+36$$
$$9x=4\cdot 36\cdot 7$$
$$x=4\cdot 4\cdot 7$$
$$x=112$$

O hâlde kabın hacmi 112 litredir.

ÖRNEK

Bir mağaza gömlek fiyatlarında önce etiket fiyatı üzerinden %30 indirim yapmış sonra indirimli fiyat üzerinden %40 lık bir indirim daha yapmıştır. Bu mağaza gömleklere etiket fiyatı üzerinden toplam % kaç indirim yapmıştır? Bulalım.



Çözüm

Bir gömleğin etiket fiyatı 100x lira olsun.

Bu gömleğin %30 indirimli fiyatı $100x\cdot 0,7=70x$ lira olur.

70x liralık gömleğin %40 indirimli fiyatı $70x\cdot 0,6=42x$ lira olur.

İkinci indirimden sonra bir gömleğin fiyatı 42x olduğuna göre yapılan toplam indirimi bulalım.

$$100x-42x=58x$$

Etiket fiyatı 100x lira olan bir gömlek için toplam 58x lira indirim yapılmıştır.

O hâlde mağaza, gömlek fiyatlarında toplam %58 indirim yapmıştır.



Bir malın %30 indirimli fiyatını bulmak için etiket fiyatı 0,7 ile çarpılır.

Bir malın %40 indirimli fiyatını bulmak için etiket fiyatı 0,6 ile çarpılır.

ÖRNEK



İki takımın birbirleriyle bir kez maç yaptığı bir ligde 16 takım vardır. Bu ligde galibiyete 3 puan, beraberliğe 1 puan ve mağlubiyete 0 puan verilmektedir.

Lig bitiminde tüm takımların puanları toplamı 320 olduğuna göre kaç maç berabere bitmiştir? Bulalım.

Çözüm

Önce yapılan maç sayısını bulalım. Takımları 1 den 16 ya kadar sıraladığımızı düşünelim. 1. takım diğer 15 takımla 15 maç yapacak, 2. takım geriye kalan 14 takımla 14 maç yapacak, 3. takım geriye kalan 13 takımla 13 maç yapacaktır. Aynı düşünceyle takımların yapacağı maç sayılarını ve toplam maç sayısını aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$15 + 14 + 13 + ... + 1$$

Bu toplamı ardışık doğal sayıların toplam formülü yardımıyla bulalım.

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{15 \cdot (15+1)}{2} = \frac{15 \cdot 16}{2} = 15 \cdot 8 = 120$$

Berabere biten maçların sayısı x,

Berabere bitmeyen maçların sayısı y olsun.

Berabere biten maçlardan elde edilen toplam puan $x \cdot 2 = 2x$

Berabere bitmeyen maçlardan elde edilen toplam puan $y \cdot 3 = 3y$ olur.

Bu bilgilere göre aşağıdaki iki denklemi yazalım x ve y değerlerini bulalım.

$$x + y = 120 \quad .... ①$$

$$2x + 3y = 320 \quad .... ②$$

① numaralı denklemde eşitliğin her iki tarafını -3 ile çarpalım. ② numaralı denklemi aynen alalım. Denklemleri alt alta yazıp toplayalım ve x değerini bulalım.

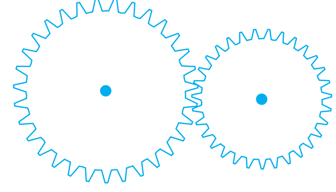
$$\begin{array}{rr} & -3x - 3y = -360 \\ + & 2x + 3y = 320 \\ \hline & -x = -40 \\ & x = 40 \end{array}$$

O hâlde 40 maç berabere bitmiştir.

SIRA SİZDE

Bu ligdeki kaç maçın berabere bitmediğini bulunuz.

ÖRNEK



Birbirini çeviren iki dişli çarktan biri 9 defa döndüğünde diğeri 12 defa dönmektedir. Bu iki çarkın diş sayılarının toplamı 56 olduğuna göre her bir çarkın diş sayısını bulalım.

Çözüm

Çarkların diş sayıları x ve y olsun. Çarkların birinin 9 defa döndüğünde aldığı yol ile diğerinin 12 defa döndüğünde aldığı yol eşittir. Buna göre aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$9x = 12y \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{9} = k$$

$$\Rightarrow x = 12k, \quad y = 9k$$



Diş sayısı çarkın çevresi ile doğru, dönme sayısı ile ters orantılıdır. Çarkların aldıkları yollar eşit olduğundan büyük çark daha az dönecektir.

İki çarkın diş sayılarının toplamı 56 olduğundan aşağıdaki eşitliği yazabilir ve k değerini bulabiliriz.

$$x + y = 12k + 9k = 21k = 56$$

$$\Rightarrow k = \frac{56}{21} = \frac{8}{3}$$

Şimdi de $x = 12k$ ve $y = 9k$ değerlerini bulalım.

$$x = 12k = 12 \cdot \frac{8}{3} = 4 \cdot 8 = 32$$

$$y = 9k = 9 \cdot \frac{8}{3} = 3 \cdot 8 = 24$$

O hâlde büyük çarkın diş sayısı 32, küçük çarkın diş sayısı 24 tür.

SIRA SİZDE

Birbirini çeviren iki dişli çarktan biri 2 defa döndüğünde diğeri 3 defa dönüyor. Bu iki çarkın diş sayıları arasındaki fark 18 olduğuna göre çarkların diş sayısını bulunuz.

ÖRNEK

Ahmet Bey, yeni aldığı otomobilinin 1200 TL olan vergisini ödüyor. Ödediği vergi, aldığı otomobilin fiyatının %2,4 üne eşittir. Buna göre Ahmet Bey'in aldığı otomobilin fiyatı kaç TL'dir? Bulalım.

Çözüm

Otomobilin fiyatı x TL olsun.

Ödediği vergi $x \cdot \frac{2,4}{100}$ TL olur.

Verilen bilgiye göre aşağıdaki eşitliği yazıp x'i bulabiliriz.

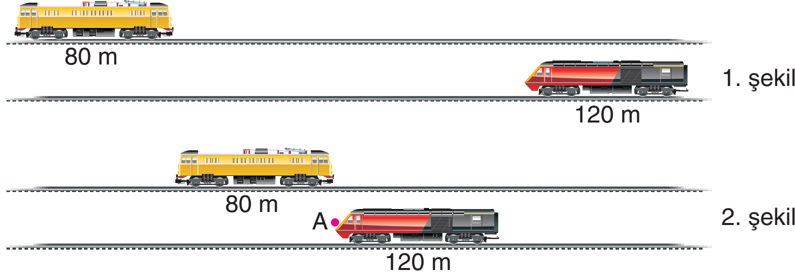
$$\frac{x \cdot 2,4}{100} = 1200 \Rightarrow x = \frac{1200 \cdot 100}{2,4}$$

$$x = 50\ 000$$

O hâlde Ahmet Bey'in aldığı otomobilin fiyatı 50 000 TL'dir.

ÖRNEK

Paralel iki ray üzerinde birbirlerine doğru hareket eden iki trenden birinin uzunluğu 80 metre ve hızı dakikada 12 metre, diğerinin uzunluğu 120 metre ve hızı dakikada 8 metredir (1. şekil). Bu iki tren A noktasında karşılaşıyor ve yollarına aynı hızlarla devam ediyor (2. şekil).

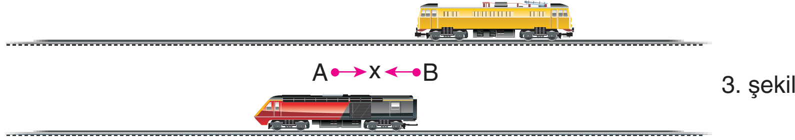


Trenlerin son vagonları B noktasında aynı hizaya geliyor. Buna göre |AB| uzunluğu kaç metredir? Bulalım.

Çözüm

|AB| uzunluğu x metre olsun.

Uzunluğu 80 metre olan tren diğer trene göre daha kısa ve daha hızlı olduğu için B noktasının konumu aşağıdaki gibi olacaktır (3. şekil).



Trenlerin A noktasında karşılaştıkları andan B noktasında son vagonlarının aynı hizaya gelene kadar geçen sürede aldıkları yolların uzunluklarını yazalım.

- Uzunluğu 80 metre olan trenin aldığı yol $(x+80)$ metre,
- Uzunluğu 120 metre olan trenin aldığı yol $(120-x)$ metredir.

Trenlerin bu yolları alma süreleri birbirine eşit olduğundan yukarıda bulduğumuz uzunlukların oranı trenlerin hızlarının oranına eşittir. Öyleyse aşağıdaki orantıyı yazabilir ve gerekli işlemleri yaparak x değerini bulabiliriz.

$$\frac{x+80}{120-x} = \frac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{8}_{2}}$$

$$2(x+80) = 3(120-x)$$

$$2x+160 = 360-3x$$

$$2x+3x = 360-160$$

$$5x = 200$$

$$x = 40$$

O hâlde |AB| uzunluğu 40 metredir.

ÖRNEK

5 TL'lik ve 10 TL'lik banknotlardan oluşan 45 tane paranın toplam değeri 375 TL'dir. Buna göre 5 TL'lik ve 10 TL'lik banknotlardan kaçar tane olduğunu bulalım.

Çözüm

5 TL'lik banknotların sayısı x, 10 TL'lik banknotların sayısı y olsun.

Buna göre, aşağıdaki denklemleri oluşturabiliriz.

$$x + y = 45 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$5x + 10y = 375 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Bu denklem sistemini yok etme yöntemiyle çözelim.

Denklemler taraf tarafa toplandığında x'li ifadenin yok olması için (1) numaralı denklemin her iki tarafını -5 ile çarpalım.

$$x + y = 45 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$-5(x + y) = 45 \cdot (-5)$$

$$-5x - 5y = -225 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

(2) ve (3) numaralı denklemleri alt alta yazıp taraf tarafa toplayarak y değerini bulalım.

$$\begin{array}{r} 5x + 10y = 375 \\ + \quad -5x - 5y = -225 \\ \hline 5y = 150 \\ y = \dfrac{150}{5} \\ y = 30 \end{array}$$

(1) numaralı denklemde y yerine 30 yazarak x'i bulalım.

$$x + y = 45$$

$$x + 30 = 45 \quad \Rightarrow \quad x = 45 - 30$$

$$= 15$$

O hâlde 5 TL'lik banknotlardan 15 tane, 10 TL'lik banknotlardan 30 tane vardır.

BULMACA

Koşucuların sabit hızlarla koştuğu bir yarışmada birinci koşucu yarışı tamamladığında ikinci ve üçüncü koşucuların yarışı tamamlamalarına sırasıyla 300 ve 550 m vardır. İkinci koşucu yarışı tamamladığında ise üçüncü koşucunun yarışı tamamlamasına 300 m vardır. Buna göre yarış pistinin uzunluğunu bulunuz.



ALIŞTIRMALAR

1. Bir sayının 5 katının 2 fazlasının üçte biri 19 dur. Bu sayıyı bulunuz.

2. Bir sayının 9 fazlasının 2 katı, aynı sayının 3 katının 1 fazlasına eşittir. Bu sayıyı bulunuz.

3. Ardışık üç doğal sayının toplamı 99 dur. Buna göre, en küçük sayıyı bulunuz.

4. Üç sayıdan ikinci sayı birinci sayının 2 katına ve üçüncü sayı birinci sayının yarısına eşittir. Bu üç sayının toplamı 28 olduğuna göre en küçük sayıyı bulunuz.

5. Farkları 12 olan iki sayıdan küçük olanının 6 katı, büyük olanının 3 katına eşittir. Buna göre büyük sayıyı bulunuz.

6. Bir salondaki erkeklerin sayısı kadınların sayısının 3 katına eşittir. Salona 12 kadın gelir, salondan 4 erkek ayrılırsa salondaki erkek ve kadınların sayıları eşit oluyor. Buna göre salonda kaç kişi olduğunu bulunuz.

7. Bir bilet kuyruğunda Ayşe'nin önündeki kişi sayısı arkasındaki kişi sayısının 2 katından 7 eksiktir. Ayşe bilet kuyruğunun tam ortasında olduğuna göre bilet kuyruğunda kaç kişi olduğunu bulunuz.



8. 25 kuruşluk ve 50 kuruşluklardan oluşan 60 tane madenî paranın toplam değeri 25 liradır. Buna göre 25 kuruşluk ve 50 kuruşluk madenî paraların sayısını bulunuz.

9. Bir miktar para 9 kişiye eşit olarak paylaştırılıyor. Eğer aynı para 10 kişiye eşit olarak paylaştırılsaydı kişi başına düşen para 2 lira eksik olacaktı. Buna göre paylaştırılan paranın kaç lira olduğunu bulunuz.

10. Bir top kumaşın önce $\frac{2}{7}$ si, sonra kalanın $\frac{3}{5}$ i satıldığında geriye 4 metre kumaş kalıyor. Buna göre bir top kumaşın kaç metre olduğunu bulunuz.

11. Bir benzin deposunun $\frac{1}{3}$ ü doludur. Depoya 7 litre benzin konulduğunda deponun yarısı dolu oluyor. Buna göre benzin deposunun hacmini bulunuz.



12. Yaş incir kurutulduğunda ağırlığının $\frac{1}{4}$ ünü kaybediyor. Buna göre 36 kg kuru incir elde etmek için kurutulması gereken yaş incir miktarını bulunuz.



13. Eşit uzunluktaki iki çubuktan biri 12 eşit parçaya, diğeri ise 15 eşit parçaya ayrılmıştır. Farklı uzunluktaki parçalardan biri diğerinden 4 cm daha uzun olduğuna göre bu iki parçanın uzunluklarının toplamını bulunuz.

14. Bir annenin bugünkü yaşı iki çocuğunun bugünkü yaşları toplamından 18 fazladır. 2 yıl sonra annenin yaşı çocuklarının yaşları toplamının 2 katından 2 fazla olacaktır. Buna göre annenin bugünkü yaşını bulunuz.

15. Bir araç A kentinden B kentine saatte ortalama 60 km hızla gidip 75 km hızla dönmüştür. Gidiş dönüş toplam 9 saat sürdüğüne göre A ve B kentleri arasındaki uzaklığı bulunuz.



16. Bir hareketli belli bir yolu saatte ortalama v km hızla t saatte almaktadır. Hareketlinin aynı yolu $t-2$ saatte alabilmesi için saatteki ortalama hızını ne kadar arttırması gerektiğini bulunuz.

17. Bir yazıcı renkli bir sayfayı 2 saniyede, siyah - beyaz bir sayfayı ise 1 saniyede yazabiliyor. Bu yazıcı 1 dakika çalıştırılarak 37 sayfa yazdırılmıştır. Buna göre yazdırılan renkli ve siyah - beyaz sayfa sayılarını bulunuz.

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizliklerle İlgili Problemler

HATIRLAYALIM

- "a büyüktür b" ifadesi sembolle $a > b$,
- "a küçüktür b" ifadesi sembolle $a < b$,
- "a büyük ya da eşittir b" ifadesi sembolle $a \geq b$,
- "a küçük ya da eşittir b" ifadesi sembolle $a \leq b$,
- "Sınavda sorulacak soru sayısı 30 dan az olacaktır." ifadesi sembolle s sınavda sorulacak soru sayısını belirtmek üzere $s < 30$,
- "Mehmet günde en az 40 dakika yürüyüş yapıyor." ifadesi sembolle t Mehmet'in günlük yürüyüş süresini belirtmek üzere $t \geq 40$,
- "Sitenin aylık aidatı en az 200 TL, en çok 300 TL'dir." ifadesi sembolle a sitenin aylık aidatını belirtmek üzere $200 \leq a \leq 300$

biçiminde gösterilir.

Bir eşitsizliğin her iki tarafına bir gerçek sayı eklendiğinde eşitsizlik yön değiştirmez.

$c \in \mathbb{R}$ ve $a > b$ ise $a + c > b + c$ dir.

Bir eşitsizliğin her iki tarafı pozitif bir gerçek sayı ile çarpıldığında ve bölündüğünde eşitsizlik yön değiştirmez.

$c \in \mathbb{R}^+$ ve $a > b$ ise $a \cdot c > b \cdot c$ ve $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ dir.

Bir eşitsizliğin her iki tarafı negatif bir gerçek sayı ile çarpıldığında ve bölündüğünde eşitsizlik yön değiştirir.

$c \in \mathbb{R}^-$ ve $a > b$ ise $a \cdot c < b \cdot c$ ve $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ dir.



$a > b$ ise $3 \cdot a > 3 \cdot b$

$a > b$ ise $\frac{a}{3} > \frac{b}{3}$

$a > b$ ise $-5a < -5b$

$a > b$ ise $-\frac{a}{5} < -\frac{b}{5}$

Eşitsizliği sağlayan değerlerin kümesine eşitsizliğin çözüm kümesi denir.

Örneğin $x \leq 6$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdaki biçimlerde gösterilebilir.

- $\{x \mid x \leq 6,\ x \in \mathbb{R}\}$
- $(-\infty, 6]$
- 

ÖRNEK

"Bir sayının 3 eksiğinin dörtte biri aynı sayının 6 eksiğinden küçüktür." ifadesinin cebirsel gösterimini yazalım.

Çözüm

Sayı x olsun.

Sayının 3 eksiğinin dörtte biri $\frac{x-3}{4}$,

Sayının 6 eksiği $x-6$ olur.

Öyleyse aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\frac{x-3}{4} < x-6$$

ÖRNEK

"Bir sayının 4 eksiğinin beşte biri aynı sayının 2 eksiğinden büyük değildir." ifadesinin cebirsel gösterimini yazalım. Elde ettiğimiz eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Sayı x olsun.

Sayının 4 eksiğinin beşte biri $\frac{x-4}{5}$,

Sayının 2 eksiği $x-2$ olur.

Eğer soru kökünde "büyük değildir" ifadesi yerine "büyüktür" ifadesi olsaydı problemin cebirsel gösterimi aşağıdaki biçimde olacaktı.

$$\frac{x-4}{5} > x-2$$

Soru kökünde "büyük değildir" ifadesi bulunduğundan şu yorumu yapabiliriz. Demek ki yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafı sağ tarafından büyük olmayacak. Eşitsizliğin sol tarafı sağ tarafından ya küçük olacak ya da sağ tarafına eşit olacak. Bu durumda eşitsizliği aşağıdaki biçimde yazabiliriz.

$$\frac{x-4}{5} \leq x-2$$

Bu eşitsizliği çözelim. Çözüm kümesini bulalım.

$\frac{x-4}{5} \leq x-2 \Rightarrow x-4 \leq 5x-10$ (Bilinmeyenleri eşitsizliğin sağ tarafında toplayalım.)

$-4+10 \leq 5x-x$ (Gerekli işlemleri yapalım.)

$6 \leq 4x$ (Eşitsizliğin her iki tarafını 4 ile bölelim.)

$\frac{6}{4} \leq x$ (Gerekli sadeleştirmeyi yapalım.)

$\frac{3}{2} \leq x$

O hâlde x sayısı $\frac{3}{2}$ ye eşit ya da $\frac{3}{2}$ den büyük olmalıdır.

SIRA SİZDE

"Bir sayının 3 fazlasının 2 katı aynı sayının 3 katından küçüktür." ifadesinin cebirsel gösterimini yazınız. Elde ettiğiniz eşitsizliğin çözüm kümesini bulunuz.

HATIRLAYALIM

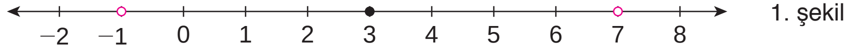
Aşağıda bazı sayı kümeleri, bu kümelerin sayı doğrusu üzerindeki gösterilişleri (kırmızıyla belirtilen kısımlar) ve aralık olarak ifadeleri verilmiştir. İnceleyiniz.

$A = \{x \mid -1 < x < 2,\ x \in \mathbb{R}\}$	$(-1, 2)$
$B = \{x \mid -1 \leq x \leq 2,\ x \in \mathbb{R}\}$	$[-1, 2]$
$C = \{x \mid -1 \leq x < 2,\ x \in \mathbb{R}\}$	$[-1, 2)$
$D = \{x \mid -1 < x \leq 2,\ x \in \mathbb{R}\}$	$(-1, 2]$
$E = \{x \mid a \leq x,\ x \in \mathbb{R}\}$	$[a, \infty)$
$F = \{x \mid x < a,\ x \in \mathbb{R}\}$	$(-\infty, a)$
$G = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$	$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

ÖRNEK

Sayı doğrusu üzerinde 3 noktasına uzaklığı 4 birimden küçük olan noktaları belirten eşitsizliği yazalım.

Çözüm



1. şekil

Sayı doğrusu üzerinde 3 noktasına 4 birim uzaklıkta olan noktalar -1 ve 7 dir.

Öyleyse -1 ve 7 noktaları eşitsizliğe dahil edilmeyeceği için bu noktaları sayı doğrusu üzerinde içi boş kırmızı yuvarlaklarla gösterelim (1. şekil).

Sayı doğrusu üzerinde 3 noktasına uzaklığı 4 birimden küçük olan noktalar -1 in sağında ve 7 nin solunda olan noktalardır. Sayı doğrusu üzerinde bu noktaların bulunduğu kısmı kırmızıyla belirtelim (2. şekil).

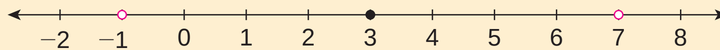


2. şekil

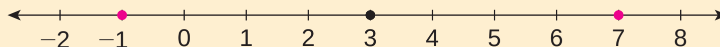
Sayı doğrusu üzerindeki bu noktalar $(-1, 7)$ açık aralığıyla ifade edilir. x; sayı doğrusu üzerinde 3 noktasına olan uzaklığı 4 birimden küçük olan bir nokta olmak üzere $-1 < x < 7$ dir.

SIRA SİZDE

Sayı doğrusu üzerinde 3 noktasına uzaklığı 4 birimden büyük olan noktaları belirten eşitsizlikleri yazınız.



Sayı doğrusu üzerinde 3 noktasına uzaklığı 4 birimden küçük olmayan noktaları belirten eşitsizlikleri yazınız.



ÖRNEK

$-5x+9\leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım. Çözüm kümesini aralık olarak ifade edelim.

Çözüm

$-5x+9\leq 0 \Rightarrow -5x\leq -9$ (Eşitsizliğin her iki tarafını -1 ile çarpıp yönünü değiştirelim.)

$\Rightarrow (-5x)(-1)\geq(-9)(-1)$ (Gerekli işlemleri yapalım.)

$\Rightarrow 5x\geq 9$ (Eşitsizliğin her iki tarafını 5 ile bölelim.)

$\Rightarrow x\geq \frac{9}{5}$

Eşitsizliğin çözüm kümesi aralıkla $Ç=\left[\frac{9}{5}, +\infty\right)$ biçiminde ifade edilir.

ÖRNEK

$4(x+5)\geq 12x-20$ eşitsizliğinin tam sayılar ve gerçek sayılar kümesinde çözüm kümesini bulalım. Çözüm kümesini farklı biçimlerde ifade edelim.

Çözüm

$4(x+5) \geq 12x-20$ (Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini kullanalım.)

$4x+20 \geq +12x-20$ (Bilinmeyeni temsil eden x'leri eşitsizliğin soluna diğer sayıları eşitliğin sağına işaret değiştirerek geçirelim.)

$4x-12x \geq -20-20$ (Gerekli işlemleri yapalım.)

$-8x \geq -40$ (Eşitliğin her iki tarafını -8 e bölelim. Eşitsizlik yön değiştirir.)

$\frac{-8x}{-8} \leq \frac{-40}{-8}$

$x\leq 5$

Verilen eşitsizliğin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini,

- Küme olarak gösterelim.

  $Ç=\{x \mid x\leq 5,\ x\in\mathbb{R}\}$

- Aralık olarak gösterelim.

  $Ç=(-\infty, 5]$

- Sayı doğrusunda gösterelim.



- Verilen eşitsizliğin tam sayılar kümesindeki çözüm kümesini yazalım.

  $Ç=\{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

ÖRNEK



Bir otoparkta park ücreti olarak ilk 5 saat için saatte 2 lira, sonraki her saat için 1 lira alınıyor. Bu otoparka aracını park eden Ali Bey'in en fazla 17 lira park ücreti ödediği biliniyor. Buna göre, Ali Bey'in otoparkı kullanma süresini gösteren cebirsel ifadeyi yazalım, çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Ali Bey'in otoparkı kullanma süresi x saat olsun.

Ali Bey'in ilk 5 saat için ödeyeceği miktar $5 \cdot 2 = 10$ lira,

Ali Bey'in ilk 5 saatten sonrası için ödeyeceği miktar $(x-5) \cdot 1$ lira olur.

Buna göre, aşağıdaki cebirsel ifadeyi yazabilir, eşitsizliğin çözüm kümesini bulabiliriz.

$$10 + (x-5) \cdot 1 \leq 17$$
$$10 + x - 5 \leq 17$$
$$x + 5 \leq 17$$
$$x \leq 12$$

O hâlde Ali Bey otoparkı en fazla 12 saat kullanmıştır.

ÖRNEK

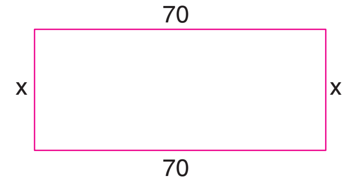
Dikdörtgen şeklindeki bir arazinin boyu 70 metredir. Bu arazinin çevresinin en az 200 metre, en fazla 240 metre olduğu biliniyor. Buna göre arazinin eninin alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

Arazinin eni x metre olsun.

Arazinin çevresi $2(x+70)$ metre olur.

Buna göre aşağıdaki eşitsizliği yazabilir, gerekli işlemleri yapabiliriz.



$$200 \leq 2(x+70) \leq 240$$
$$200 \leq 2x + 140 \leq 240$$
$$200 - 140 \leq 2x + 140 - 140 \leq 240 - 140$$
$$60 \leq 2x \leq 100$$
$$30 \leq x \leq 50$$

Arazinin eni en az 30 metre, en fazla 50 metre olabilir.

SIRA SİZDE

Dikdörtgen şeklindeki bir arazinin boyu 40 metredir. Arazinin eninin ise 15 ile 20 metre arasında olduğu biliniyor. Bu arazinin çevresinin alabileceği değerleri bulunuz.

ÖRNEK



Ayşe'nin 100 puan üzerinden değerlendirilen sınavlarının ilk beşinden aldığı puanlar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Sınavlar	Alınan Not
1. sınav	60
2. sınav	70
3. sınav	78
4. sınav	68
5. sınav	70

Ayşe'nin başarılı sayılabilmesi için altı sınavdan aldığı puanların aritmetik ortalamasının en az 70 olması gerekmektedir.

Ayşe'nin başarılı sayılabilmesi için altıncı sınavdan en az kaç puan alması gerekir? Bu durumu gösteren matematiksel ifadeyi yazalım. Çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Ayşe'nin altıncı sınavdan alması gereken puan x olsun. Buna göre, aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\frac{60+70+78+68+70+x}{6} \geq 70 \Rightarrow \frac{346+x}{6} \geq 70$$

Eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

$$\frac{346+x}{6} \geq 70 \Rightarrow 346+x \geq 6 \cdot 70$$

$$x \geq 420-346$$

$$x \geq 74$$

O hâlde, Ayşe beşinci sınavdan en az 74 puan almalıdır. Çözüm kümesini iki farklı biçimde ifade edelim.

$$Ç = \{x \mid 74 \leq x \leq 100,\ x \in \mathbb{R}\}$$

$$Ç = [74,\ 100]$$

SIRA SİZDE

- Altı sınavdan aldığı puanların aritmetik ortalamasının en az 73 olması için Ayşe'nin altıncı sınavdan en az kaç puan alması gerektiğini bulunuz.
- Ayşe'nin son sınavdan 62 puan aldığı biliniyor. Buna göre, Ayşe'nin altı sınavdan aldığı puanların aritmetik ortalamasını bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

1. “Bir sayının 5 eksiğinin üçte biri aynı sayının 2 eksiğinden küçüktür.” ifadesinin cebirsel gösterimini yazınız.

2. “Bir sayının 2 fazlasının dörtte biri aynı sayının 2 katının 3 eksiğinden küçük değildir.” ifadesinin cebirsel gösterimini yazınız.

3. Sayı doğrusu üzerinde 1 noktasına uzaklığı 3 birimden büyük olan noktaları sayı doğrusu üzerinde gösteriniz. Bu noktaları belirten eşitsizlikleri yazınız.

4. Sayı doğrusu üzerinde 7 noktasına olan uzaklığı, 10 noktasına olan uzaklığından büyük olan noktaları sayı doğrusu üzerinde gösteriniz. Bu noktaları belirten eşitsizliği yazınız.

5. Dikdörtgen şeklindeki bir arsanın kenarlarından birinin uzunluğu 20 metredir. Bu arsanın çevresi en az 140 metre olduğuna göre arsanın diğer kenarının uzunluğunu belirten eşitsizliği yazınız.



6. Bir telefon şirketi yurtdışı görüşmelerde ilk 5 dakika için 0,82 lira ve sonraki her dakika için 0,42 lira almaktadır. Yurtdışı görüşmeleri için ayda en fazla 20 lira ayıran bir kişinin görüşme süresini belirten eşitsizliği yazınız.



2. BÖLÜM BİLİNÇLİ TÜKETİCİ ARİTMETİĞİ

Bütçe Oluşturma

Bütçeler gelir ve gider arasındaki dengeyi kollayarak finansal imkânların en iyi biçimde değerlendirilmesini sağlayan planlama ve kontrol araçlarıdır.



Bütçelerdeki her girdi ve çıktıya "kalem" denir. Bütçe, belirli bir dönem için gelir ve gider kalemleri üzerine kurulur.

Bütçede belirlenen giderler gelirlerden çoksa bütçe açık verir. Gelir ve giderlerin birbirine eşit olduğu bütçelere "denk bütçe" denir.

Gelir yetersizliği nedeniyle bütçe denkleştirilemediğinde giderleri karşılamak için borçlanma yoluna gidilebilir. Ancak borçlanmanın süresi ve miktarı iyi planlanmalıdır.

Tasarruf, elde edilen gelirin kullanılmayan kısmıdır. Tasarruf etmek için gelirinizi artırmanız veya giderinizi azaltmanız gerekir.

Bütçenin Amacı

Bütçe oluşturmanın amaçlarından bazıları şunlardır:

- **Önceliklerin belirlenmesi:** Bütçeler yaşam içinde finansal önceliklerin belirlenmesinde bize yardımcı olur.
- **Kontrol ve esneklik:** Bütçe, finansal olarak "ayağımızı yorganımıza göre uzat"mayı sağlar. Gelirimizi iyi kullanarak finansal bağımsızlığımızı sürdürmemize yardımcı olur.
- **Ödemelerin takvimi:** Ödemelerin zamanında yapılması için bütçe uygun bir araçtır.
- **Disiplin:** Bütçe ile hareket edenler gelirle gider arasındaki dengeyi sağlamada daha başarılı olurlar. Bütçelerin amacı finansal disiplini gerçekleştirmektir.
- **Sigorta:** Geleceğin finansal planlanmasıdır. Bütçe sizin hem beklenen hem de beklenmedik durumlarınıza karşı bir tedbir olarak yapılır.
- **Gelirin yerinde kullanılması ve tasarruf:** Küçük tasarruflar zaman içinde hızla büyür. Tasarruf etme alışkanlığı hayattaki sağlam sigortalardan biridir.
- **Finansal tercihler:** Günlük hayatımızda gelirimiz ve giderimiz arasındaki dengeyi gözetmek önemlidir. Bu, bizim tercihlerimize yardımcı olur.

Bütçenin Hazırlanması Süreci

1. Bütçe hazırlanmasında ilk adım, bütçeniz için uygun bir dönem belirlemektir. Bu dönem, ana gelirinizin ve giderlerinizin takvimi ile ilintilidir. Aylık maaş alan bir ailenin giderlerinin bir çoğu da aylık ise bütçenin aylık düzenlenmesi uygun olur.

2. Bütçenizin dönemini belirledikten sonraki adım, o dönem için gelirinizi ve giderlerinizi kategorilere bölmek ve onları da kalem kalem belirlemektir. Şimdi gider bölümünü inceleyelim.

   a. Dönem dönem tekrarlayan giderler: Kira, evin banka borcu, arabanın taksidi, sigorta, taksitli borç ödentisi gibi giderlerdir. Bu giderler sabit olarak birbirini izleyen dönemlerde ortaya çıkar.

   b. Dönemden döneme değişen giderler: Kredi kartı, telefon, elektrik, su, gaz, yiyecek, arabanın benzini, sağlık, ulaşım, elbise ve ayakkabı gibi giderlerdir. Geçmiş tecrübelerinize göre bunları tahmin edip en yakın 10 TL'ye yuvarlamak yerinde olur.

   c. Söz konusu dönem için kendinize yapacağınız "mutlak gerekliliği olmayan" harcamalar: Bunlar eğlence, hobi, yemeğe gitme ve benzeri harcamaları içerir.

   ç. Ekstra giderler: Bunlar diğer kategorilerde olmayan ve rastgele ortaya çıkan düzensiz giderlerdir. Örnek olarak araba tamiri, hediyeler, evde gerekli tamirat ve benzeri harcamaları içerir.

Gider kategorilerini belirledikten sonra bir tablo yapılmalıdır. Her kategori için uygun sayıda satır hazırlamak gerekir. Birinci sütunda o kategorinin adı, ikinci sütunda kalemler, üçüncü sütunda kalemlerin tutarları ve izleyen sütunda da her kalemin genel toplama göre yüzdesi yazılır. Böylelikle harcamaların birbirlerine oranla büyüklükleri ve tüm bütçe içinde önemi görülebilir.

Yukarıdaki adımları gözden geçirmek ve uygun düzenlemeleri yapmak, bütçe hazırlanmasında gerekli bir adımdır. Bu adımda gerçekçi olmak bütçe uygulamasının değerini artırır.

Dikkat Edilecek Hususlar

- Bütçe, harcamayı kısma aracı değil, yaşam standardını yükseltme aracıdır.
- Bütçe, hiçbir zaman mükemmel olamaz ama devamlı düzenlemelerle yararlı bir araç hâline gelir.
- Düzenli olmayan giderler için bütçenin her dönem denetlenmesi gerekir.
- Bir ay bütçe denk gelmezse gelecek ay açığın kapatılacağını düşünmek yaygın fakat yanlış bir alışkanlıktır.
- Bütçenin ne çok detaya girmesi ne de çok kaba kalemlerden oluşması gerekir. Gerekli ayrıntıyı tutturmak ise zaman alır.
- Bütçenin tutması için harcamalarınızı bütçeye göre yapmanız gerekir.

ÖRNEK

Aşağıda bir ailenin bir aylık bütçesi gösterilmiştir. Bu bütçeyi yorumlayalım.

GELİR			
	Maaş	2300 TL	%100
	Prim		
	Diğer		
GİDER			
KONUT	Kira	900 TL	%39,13
	Sigorta	50 TL	%2,17
	Bakım-Tamirat		
OTOMOBİL	Sigorta		
	Benzin		
	Kredi Taksidi		
	Bakım-Tamir		
FATURA VE AİDATLAR	Elektrik	80 TL	%3,48
	Apartman Aidatı	60 TL	%2,61
	Su	70 TL	%3,04
	Doğal gaz	80 TL	%3,48
	Ev Telefonu	30 TL	%1,31
	Kablo TV	32 TL	%1,39
	Cep Telefonu	50 TL	%2,17
GİYİM	Giyim Harcamaları	80 TL	%3,48
EĞİTİM	Çocukların Okul Masrafı	70 TL	%3,04
	Diğer Masraflar	50 TL	%2,17
SAĞLIK	Sağlık Harcamaları		
EĞLENCE	Tatil	200 TL	%8,7
	Hobi		
	Diğer	48 TL	%2,09
GIDA	Bakkal - Manav (Market)	500 TL	%21,74
DİĞER HARCAMALAR	Hediye		
	Bağış		

Çözüm

Bu ailenin gelirleri yalnızca maaş kaleminden oluşmaktadır. Ailenin aylık geliri toplam 2300 TL'dir. Bu ailenin gider kategorileri ve bu kategorilere ait harcamaları aşağıdaki gibidir.

1. Konut (950 TL)
2. Fatura ve aidatlar (402 TL)
3. Giyim (80 TL)
4. Eğitim (120 TL)
5. Eğlence (248 TL)
6. Gıda (500 TL)

Bu bütçeyle ilgili aşağıdaki sonuçlara ulaşılabilir:

- Otomobil, sağlık ve diğer harcamalar kategorilerinde herhangi bir harcama yer almamaktadır.
- Giderler içinde en büyük paya sahip olan kategori konuttur. Konuttan hemen sonra gıda gelmektedir.
- Giderler içinde en küçük paya sahip olan kategori giyimdir.
- Her bir kalemin bütçe içerisindeki payı, tablonun son sütununda yüzde olarak verilmiştir.
- Konut kategorisinin bütçe içindeki payı %41,30'dur.
- Fatura ve aidatlar kategorisi 7 farklı harcama kaleminden oluşmaktadır.
- Giderler içinde en büyük paya sahip olan kalem 900 TL ile konut kirası, en küçük paya sahip olan kalem ise 30 TL ile ev telefonu faturasıdır.
- Giderler toplamı gelirler toplamına eşit olduğundan bu ailenin bütçesi denk bütçedir. Dolayısıyla bu aile herhangi bir tasarrufta bulunmamaktadır.

SIRA SİZDE

Bu örnekte verilen aile bütçesini kullanarak,

- Gelirin %15 düştüğünü varsayıp bütçeyi yeniden düzenleyiniz. Öncelikle hangi gider kalemlerinde bir azalışa gideceğinizi planlayınız.
- Gelirin %20 arttığını varsayıp bütçeyi yeniden düzenleyiniz. Bütçeye bir de tasarruflar kalemi ekleyiniz.

PROJE

Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK), hane halkı tüketim harcamalarının dağılımını belirlemek için her yıl çeşitli illerde belirlenen örnek hane halkına anket uygulamaktadır. Bu ankette yer alan tüketim kategorileri şunlardır:

- Gıda ve alkolsüz içeçekler
- Alkollü içecekler, sigara ve tütün
- Giyim ve ayakkabı
- Konut ve kira
- Mobilya, ev aletleri ve ev bakım hizmetleri
- Sağlık
- Ulaştırma
- Haberleşme
- Eğlence ve kültür
- Eğitim hizmetleri
- Lokanta ve oteller
- Çeşitli mal ve hizmetler

Bu projede aşağıdaki adımları izleyerek bir aile bütçesi oluşturmanız istenmektedir.

1. Bu kategori birer karta yazınız. Daha sonra tanıdık ve akrabalarınıza, kendi bireysel yaşamlarındaki durumu göz önünde bulundurarak bu kartları en büyük harcamadan en aza doğru sıralamalarını söyleyiniz.
2. Sıralama işlemini en az 15 kişi ile tamamlayınız.
3. Sonra her kişinin sıralaması için harcama kategorilerini puan olarak yazınız. Birinci önem taşıyan harcamaya 1 puan, ikinci önem taşıyan harcamaya 2 puan veriniz. Diğer harcamaları da benzer şekilde puanlayınız.
4. Bir tablo oluşturunuz. Satır başlıklarında kişiler, sütun başlıklarında da harcama kategorileri olsun. Eldeki veriyi bu tabloya giriniz. (Burada veriden kasıt sizin her karta yazdığınız numara olacaktır.)
5. Elinizdeki tablodan sütun toplamlarını bulunuz. Denek sayısına bölerek ortalamalarını alınız.
6. Sütun toplamlarına göre harcamaları sıralayınız ve tablonuzun altına yazınız.
7. Ortalama sıralamayı bir sütun grafiği ile gösteriniz.
8. Bulgularınızı tartışınız.
   - Ortalama sıralama neyi gösteriyor?
   - Gelir gruplarına göre harcama sıralamasında fark var mı?
   - Yaş gruplarına göre harcama sıralaması değişiyor mu?

Kurumsal Bütçe

Şirketler ve diğer kurumlar da gelir ve giderlerini planlamak için bütçe yaparlar. Onların bütçesi de ailelerinki gibi eldeki gelirin en iyi kullanım alanına tasarruf içinde yatırılmasını amaçlar.



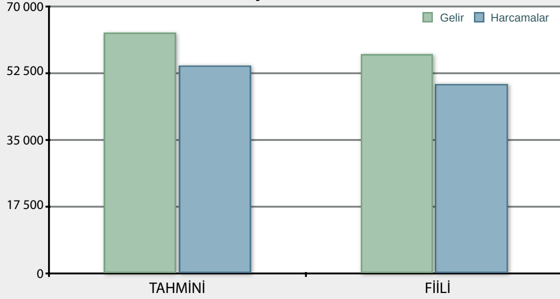
ÖRNEK

Bir şirketin aylık bütçesi aşağıda görülmektedir. Bu bütçede, gelir ile harcama kalemlerinin tahmini ve fiili (gerçekleşen) rakamları verilmiş ve "Bütçe Özeti" kısmında bu durum sütun grafiklerle gösterilmiştir. Grafiğin altında yer alan "En yüksek 5 işletme harcamam hangileri?" kısmında ise bu beş harcama, tutarlarıyla ve tüm harcamalar içerisindeki yüzdelik paylarıyla birlikte verilmiştir. Bu harcamalarda yapılacak %15 lik bir azaltmanın ne kadar olacağı ise son sütunda gösterilmiştir. İnceleyiniz.

AYLIK BÜTÇE

BÜTÇE TOPLAMLARI	TAHMİNİ	FİİLİ	FARK
Gelir	63.300,00	57.450,00	5.850,00
Harcamalar	54.500,00	49.630,00	4.870,00
Bakiye (Gelir eksi Harcamalar)	8.800,00	7.820,00	980,00

BÜTÇE ÖZETİ



EN YÜKSEK 5 İŞLETME HARCAMAM HANGİLERİ?

HARCAMA	TUTAR	HARCAMA %'Sİ	%15 AZALTMA
Bakım ve onarımlar	4.600,00	%9,3	690,00
Sarf Malzemeleri	4.500,00	%9,1	675,00
Kira ya da ev kredisi	4.500,00	%9,1	675,00
Vergiler	3.200,00	%6,4	480,00
Reklam	2.500,00	%5,0	375,00
Toplam	19.300,00	%38,9	2.895,00

GELİR	TAHMİNİ	FİİLİ	EN YÜKSEK 5 TUTAR	FARK
Net satışlar	60.000,00	54.000,00	54.000,00	6.000,00
Diğer faaliyet gelirleri	3.000,00	3.000,00	3.000,00	0,00
Varlık satışları (kar/zarar)	300,00	450,00	450,00	150,00
Toplam	63.300,00	57.450,00		5.850,00

PERSONEL HARCAMALARI	TAHMİNİ	FİİLİ	EN YÜKSEK 5 TUTAR	FARK
Ücretler	9.500,00	9.600,00	9.600,00	100,00
Çalışan avantajları	4.000,00		0,00	4.000,00
Komisyon	5.000,00	4.500,00	4.500,00	500,00
Toplam Personel	18.500,00	14.100,00		4.400,00

İŞLETME HARCAMALARI	TAHMİNİ	FİİLİ	EN YÜKSEK 5 TUTAR	FARK
Reklam	3.000,00	2.500,00	2.500,00	500,00
Şüpheli alacaklar	2.000,00	2.000,00	2.000,00	0,00
Nakit indirimleri	1.500,00	2.175,00	2.175,00	675,00
Teslimat maliyetleri	2.000,00	1.500,00	1.500,00	500,00
Amortisman	1.000,00	1.000,00	1.000,00	0,00
Aidatlar ve abonelikler	500,00	525,00	525,00	25,00
Sigorta	1.300,00	1.275,00	1.275,00	25,00
Varlık alışları	2.000,00	2.200,00	2.200,00	200,00
Yasal ve denetleme	1.000,00	800,00	800,00	200,00
Bakım ve onarımlar	4.500,00	4.600,00	4.600,00	100,00
Büro malzemeleri	800,00	750,00	750,00	50,00
Posta	400,00	350,00	350,00	50,00
Kira ya da ev kredisi	4.100,00	4.500,00	4.500,00	400,00
Satış giderleri	350,00	400,00	400,00	50,00
Nakliye ve depolama	900,00	840,00	840,00	60,00
Sarf Malzemeleri	5.000,00	4.500,00	4.500,00	500,00
Vergiler	3.000,00	3.200,00	3.200,00	200,00
Telefon	250,00	280,00	280,00	30,00
Su - Elektrik	1.400,00	1.385,00	1.385,00	15,00
Diğer	1.000,00	750,00	750,00	250,00
Toplam İşletme	36.000,00	35.530,00		470,00



Tablo oluşturmanızı, verileri hesaplamanızı ve çözümlemenizi sağlayan çeşitli yazılımlar bulunmaktadır. Bu türden yazılımlara elektronik tablo yazılımları adı verilir. Elektronik tablo yazılımları, girdiğiniz sayısal değerleri otomatik olarak derleyen tablolar ve basit grafikler oluşturmanızı sağlar.

ALIŞTIRMALAR

1. Tablodaki bilgilere göre iki çocuklu bir aileye yönelik eylül ayı bütçe planı hazırlayınız (Çocukların ilkokulda öğrenim gördüğünü varsayınız.).

İşlem Basamakları	Öneriler
➢ Bütçede belirtilen süre içinde aile bireylerinin istek ve ihtiyaçlarını tespit ediniz.	✓ Aile bireylerinin sayısını dikkate alabilirsiniz. ✓ Bütçeyi planlayacağınız ayı göz önünde bulundurabilirsiniz. ✓ İhtiyaçları öncelikle haftalık olarak tespit edebilirsiniz. ✓ Yiyecek, giyinme, işletme, taşıt, sağlık, eğitim, eğlence, ev mefruşatı ve kişisel giderleri dikkate alabilirsiniz.
➢ Bütçede belirtilen istek ve ihtiyaçların değerlerini belirtiniz.	✓ Tahmini ve gerçek değerlerini yazabilirsiniz.
➢ Bütçede planlanan süre içerisinde ailenin beklenen toplam gelirlerini hesaplayınız.	✓ Ailenin sabit ve değişen gelirlerini dikkate alabilirsiniz.
➢ Bütçe için planlanan sürede beklenen gelir ile tahmin edilen gideri karşılaştırınız.	✓ Tahmin edilen gider, beklenen gelirden fazla ise bütçede belirtilen istek ve ihtiyaçların gerçek değerlerini araştırabilirsiniz. ✓ Piyasa araştırması yapabilirsiniz.
➢ Bütçe için planlanan sürede beklenen gelir ile gerçek gideri karşılaştırınız.	✓ Bütçe için planlanan sürede beklenen gelir ile gerçek giderin birbirine denk olmasına dikkat edebilirsiniz.
➢ Bütçe için planlanan sürede beklenen gelir ile gerçek gider arasında denklik sağlamaya çalışınız.	✓ Bütçede açık vermemeye özen gösterebilirsiniz. ✓ Zorunlu ihtiyaçlara öncelik tanıyabilirsiniz. ✓ Zorunlu olmayan ihtiyaçlar için sonraki aylarda harcama yapabilirsiniz. ✓ Bütçede yer alan istek ve ihtiyaçlardan kısıtlama yapabilirsiniz. ✓ Bütçede artırım yoluna gidebilirsiniz.

2. Aşağıda, mühendislik fakültesinde okuyan bir üniversite öğrencisinin 1 dönemlik (5 aylık) eğitim bütçesi verilmiştir.



her ay gelen para

öğe	tutar
maaş	400,00 TL
burslar ve diğer maddi yardımlar	600,00 TL
annem ve babam	750,00 TL
diğer	0,00 TL
toplam	**1.750,00 TL**

bu yarıyılda ihtiyacım olan

öğe	tutar
okul ücreti	2.000,00 TL
laboratuvar ücretleri	500,00 TL
kitaplar	600,00 TL
diğer ödemeler	100,00 TL

her ay harcadığım

öğe	tutar
kira	320,00 TL
su - elektrik - yakıt	130,00 TL
cep telefonu	80,00 TL
bakkaliye	240,00 TL
ulaşım	160,00 TL
kredi kartları	200,00 TL
kişisel bakım	60,00 TL
eğlence	120,00 TL
çeşitli	50,00 TL

İki yıl sonra sınavı kazanıp sizin de üniversite öğrencisi olacağınızı düşünelim. Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayıp kendi bütçenizi oluşturunuz.

a. Gelir ve gider kalemlerinizde bir değişiklik olur muydu? Örneğin okumak istediğiniz bölümde laboratuvar ücretleri kalemi yer alır mıydı?

b. Bu öğrenci part time (yarı zamanlı) bir işte çalışıp aylık 400 TL gelir elde etmektedir. Böyle bir işte çalışmayı düşünmediğiniz takdirde bütçenizi nasıl denkleştirmeyi düşünüyorsunuz?

c. “altında/üstünde tutarı” bölümünde belirtilen – 250 TL ne anlama geliyor? Sizin bütçenizde bu sayı “+” mı yoksa “–” mi çıkıyor?

ç. Ailenizin yaşadığı şehirdeki bir üniversitede okuduğunuzda bütçenizdeki kalemlerde nasıl bir değişiklik olurdu?

3. Dünyanın en büyük havalimanlarından bir tanesi olacak İstanbul Yeni Havalimanı Projesi’nin bütçesinde hangi gider kalemlerinin yer alabileceğini tahmin ediniz. İnternette proje ile ilgili araştırma yaparak gerçek bütçedekilerle tahmininizi karşılaştırınız.



Seyahatlerde Mümkün Olan Alternatifler

Seyahat Planlaması

İyi bir seyahat nasıl planlanır?

Gideceğiniz yeri ve yolculuk tarihinizi belirleyin

Nereye gideceğiniz konusunda kararlı olmanız seyahat planınızın diğer adımlarına geçebilmeniz açısından önemlidir. Eğer gideceğiniz yer belli değilse diğer adımları uygulamak zorlaşacaktır.



Yola çıkış tarihinizi erken belirlemeniz erken rezervasyon yaptırabilmenizi sağlar. Böylece hem ulaşımda hem de konaklamada ucuz fiyatlar ve çeşitli fırsatlar yakalayabilirsiniz.

Bütçenizi oluşturun

Uçağa mı bineceksiniz yoksa araba mı kiralayacaksınız? Otelde mi kalacaksınız, çadır mı kuracaksınız? Gideceğiniz yere nasıl ulaşacaksınız? Günlük aktivite ve turlara katılacak mısınız? Bütçeniz seyahatinizin ana hatlarını belirleyecektir.



Rezervasyon yaptırın

Gideceğiniz yeri belirledikten sonra kalacak yer için otel rezervasyonunuzu yaptırabilirsiniz.

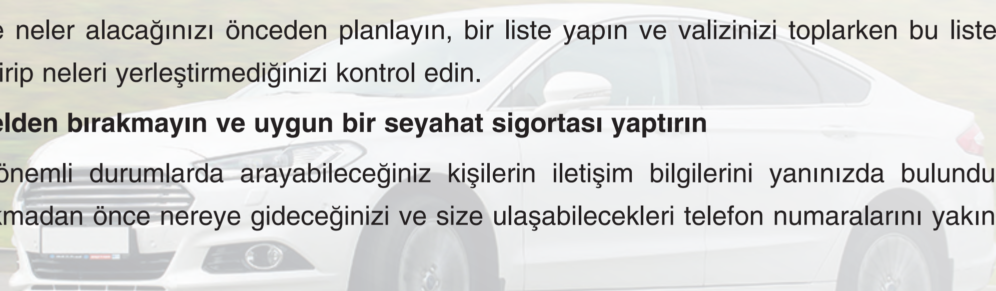
Gitmeden biraz okuyun

İnternetten ve ilgili kitaplardan gideceğiniz yer ile ilgili bilgi edinin. Hatta bir yabancı ülkeye gidiyorsanız ve dilini bilmiyorsanız, derdinizi anlatabileceğiniz birkaç cümle ve kelimeyi öğrenmeye çalışın ya da en azından yanınızda bulundurabileceğiniz küçük bir sözlük edinin.

Ayrıca nereleri gezmelisiniz, bölgenin en bilinen özellikleri neler, tavsiye edilen restoranlar var mı, en beğenilen plaj hangisi, ne tür etkinliklerde bulunabilirsiniz vb. bilgiler, seyahatinizden en iyi şekilde faydalanmanızı sağlar.

Valizinizi hazırlamayı son dakikaya bırakmayın

Valizinize neler alacağınızı önceden planlayın, bir liste yapın ve valizinizi toplarken bu listeden neleri yerleştirip neleri yerleştirmediğinizi kontrol edin.



Tedbiri elden bırakmayın ve uygun bir seyahat sigortası yaptırın

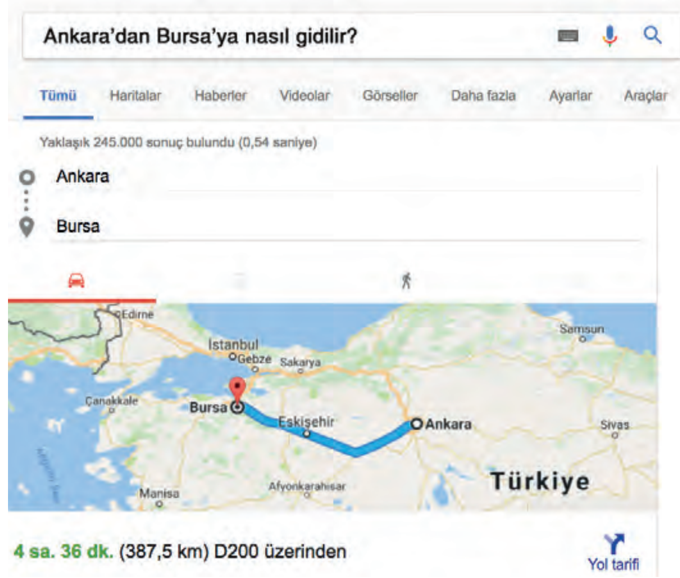
Acil ve önemli durumlarda arayabileceğiniz kişilerin iletişim bilgilerini yanınızda bulundurun. Seyahate çıkmadan önce nereye gideceğinizi ve size ulaşabilecekleri telefon numaralarını yakınlarınıza bildirin.

Seyahat sigortası karşılaşabileceğiniz aksaklıklara karşı sizi ve sevdiklerinizi güvence altına alır. Seyahat öncesi doktorunuzdan randevu alıp muayene olun ve sağlığınızla ilgili herhangi bir sorununuz olup olmadığından emin olun. Kullandığınız ilaçları yanınıza almayı unutmayın.

ÖRNEK

Teknoloji günlük hayatımızın bir parçasıdır. Bu örnekte bilgisayar yardımı ile bir seyahat planlaması gerçekleştireceğiz. Amacımız Ankara'dan Bursa'ya nasıl ve kaç saatte gidileceğini öğrenmek olacak. Aşağıdakileri adım adım uygulayın.

1. Bilgisayarınızın arama çubuğuna "Ankara'dan Bursa'ya nasıl gidilir?" yazın. Ekranınızda aşağıdakileri göreceksiniz. Bilgisayar, bu seyahatin araba ile yaklaşık olarak 4,5 saate yakın bir zaman alacağını bize sergiliyor. Bunu öğrendikten sonra yol tarifini alacağız. Şimdi harita üzerine tıklayın.

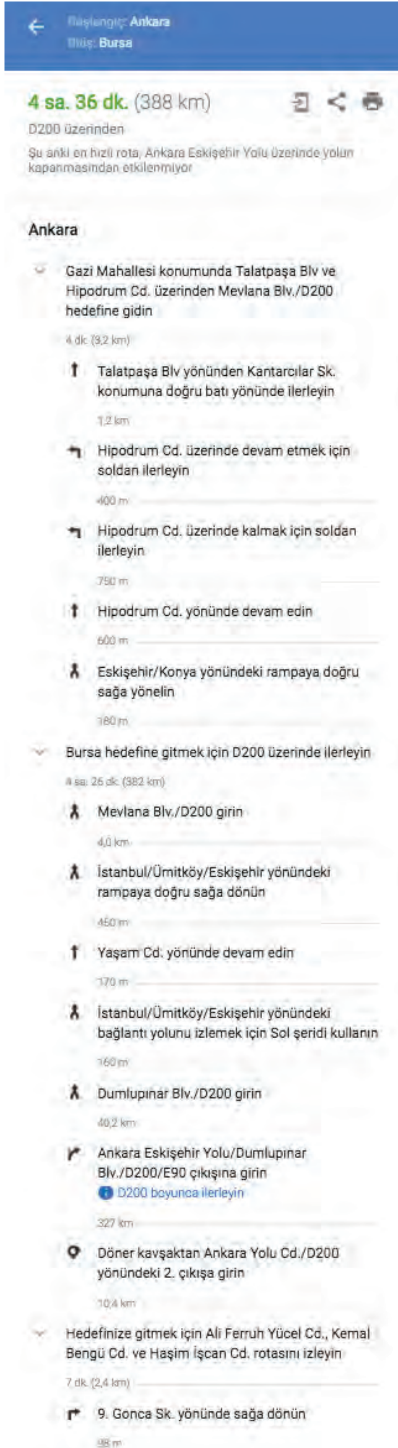


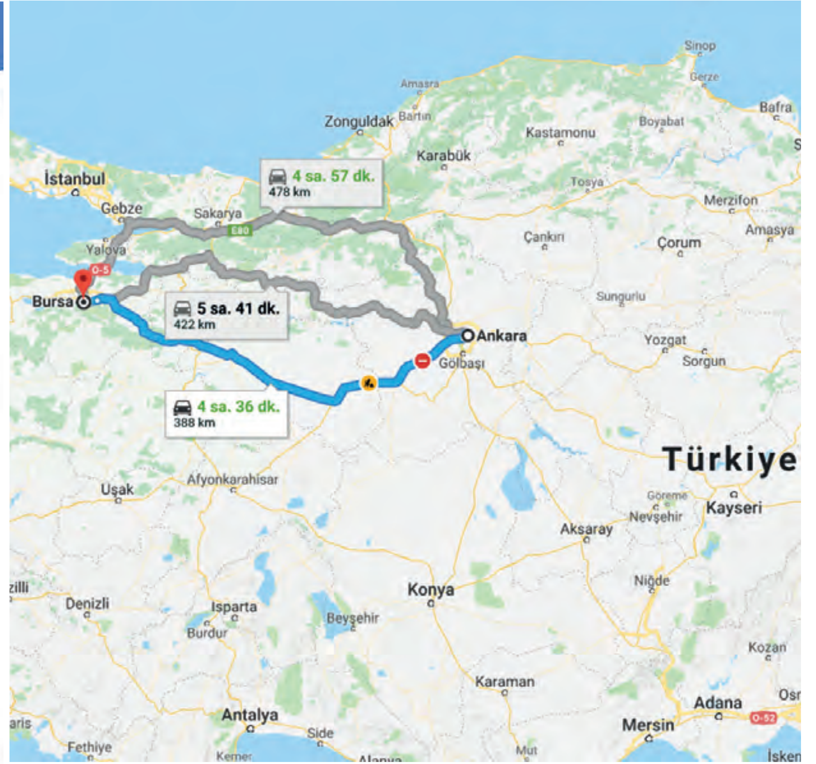
2. Harita üzerine tıklayınca harita büyüyecek ve aşağıdaki görseli göreceksiniz (Eğer aşağıdaki görselde harita yerine uydu görüntüsü ile karşılaşırsanız o da aynı işi görecektir. Sol alt köşedeki kutuya tıklamak, size harita ve uydu görüntüsünü değiştirmenizi sağlayacaktır.).



3. “Ayrıntılar”a tıklamak seyahatin bütün detaylarını almak için yeterlidir. Aşağıda görüldüğü gibi ekranın sol tarafı size ne yapmanız gerektiğini gösterecektir. İnce detaylar için aşağıya dönük çift oklara tıklayabilirsiniz.

Böylelikle hem yol tarifini alacaksınız hem de yolun o bölümünü ne kadar sürede geçeceğinizi öğreneceksiniz.



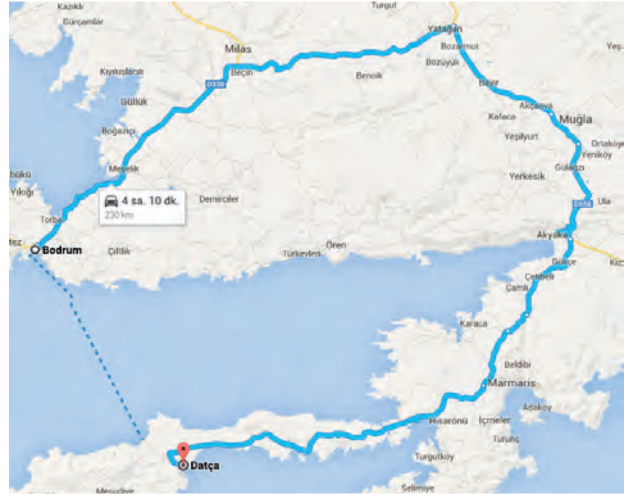


SIRA SİZDE

Şimdi siz de bulunduğunuz şehirden bir başka şehire gitmek için yol tarifini yukarıdaki gibi alın. Bunun için benzer adımları tekrarlayacaksınız; yalnız arama çubuğuna yazdığımız “Ankara’dan Bursa’ya nasıl gidilir?” ifadesinde ufak bir değişiklik gerekecek. Oraya siz, tercih ettiğiniz şehirlerin ismini gireceksiniz.

ÖRNEK

İki arkadaş otomobilleriyle Ege kıyılarında seyahat etmektedir. Planlarında Bodrum'dan sonra Datça'ya gitmek vardır. Bu iki arkadaş seyahatlerini kara yolunun yanı sıra feribotla da yapabileceklerini öğrenmişlerdir. Biraz araştırmayla şu bilgilere ulaşırlar:



Bodrum – Datça arası,

- Kara yoluyla 230 km, yaklaşık 4 saat 10 dakika,
- Feribotla yaklaşık 1 saat 30 dakikadır.

Feribot tarifesi: 1 küçük oto tek yön 130 TL, araç içerisindeki yolcular ekstra 20 TL.



Daha önceki seyahat tecrübelerinden otomobillerinin 100 km'de ortalama 8 litre benzin yaktığını bilen bu iki arkadaşın süre ve maliyet yönünden iki alternatif yoldan hangisini seçebileceğini irdeleyelim (Benzinin litre fiyatı 5,71 TL dir.).

Çözüm

Alternatif yolları süre açısından inceleyelim.

Kara yolu ile ulaşım: 4 saat 10 dakika = 250 dakika

Deniz yolu ile ulaşım: 1 saat 30 dakika = 90 dakika

O hâlde, feribotla gitmeleri durumunda Datça'ya $250-90=160$ dakika erken varırlar. Ayrıca yol yorgunluğu da çekmezler.

Alternatif yolları maliyet açısından inceleyelim.

- Kara yoluyla gittiklerinde otomobilleri,

$$\frac{230}{100}\cdot 8 = 18,4 \text{ litre benzin tüketir.}$$

Ödeyecekleri benzin parası,

$$18,4\cdot 5,71 \approx 105 \text{ TL dir.}$$

- Feribotla gittiklerinde ödeyecekleri ücret,

$$130+20=150 \text{ TL dir.}$$

Karayolu yerine feribotla gitmeyi tercih ederlerse $150-105=45$ TL fazla para vereceklerdir. Kazanılan süre ve maliyetler arasındaki farkın düşük olması sebebiyle Bodrum'dan Datça'ya feribotla geçmek daha uygun olabilir.

ÖRNEK

Bir tur rehberi, bir yaz günü için Kapadokya'nın yandaki haritada gösterilen bölgesine gezi planlamıştır.



Kalınacak otelin Avanos'a olan uzaklığı yaklaşık 5 km, Ürgüp'e olan uzaklığı ise yaklaşık 15 km'dir.

Sıcak hava balonuyla uçuş deneyimi yaşayarak Kapadokya manzarasını yukarıdan görmek için turistler sabah saat 04.30 da balon şirketi tarafından otelden alınıp saat 08.00 de otelde olacak şekilde dönüş yapılacaktır. Otel ile balon uçuş noktasının arası yaklaşık 30 dakika sürmektedir. Otele dönüşte 1,5 saatlik kahvaltı ve dinlenme süresi verilecektir.

Aşağıdaki tabloda, rehberin planladığı gezi ile ilgili bilgiler verilmiştir.

Gidilecek Yerler	Notlar	Önceki Noktaya Mesafesi	Bölgede Ortalama Gezi Süresi
Avanos	El sanatları merkezlerinde alışveriş Tophane ve Bayram Tepesi'nde fotoğraf çekimi Irmak kenarında yürüyüş	5 km	1 saat
Paşabağ	Paşabağ Vadisi'nde yürüyüş	6 km	30 dakika
Zelve	Zelve Açıkhava Müzesi'nde yürüyüş Tünellerden kaya kiliselerine tırmanış	2 km	1,5 saat
Çavuşin	Çavuşin Kilisesi ziyareti Eski Çavuşin Köyü'nde kısa gezi	5 km	1 saat
Göreme	Öğle yemeği Göreme Açık Hava Müzesi ziyareti	3 km	3 saat
Ortahisar	Ortahisar Kalesi çevresinde gezi	2 km	1 saat
Ürgüp	Üç Güzeller peribacaları gezisi Temenni Tepesi fotoğraf çekimi Gezi ve alışveriş Akşam yemeği ve eğlence	7 km	3,5 saat

Bu gezinin gidilecek yerlere ilişkin zaman çizelgesini yapalım.

Çözüm

Zaman çizelgesini yandaki gibi üç sütun hâlinde oluşturup sütunları sırasıyla gidilecek yer, varış saati ve hareket saati olarak isimlendirelim. Bir yere varış saatini, bir önceki yere olan uzaklığını düşünerek; hareket saatini ise o yerdeki ortalama gezi süresini göz önüne alarak hesaplayıp tabloyu dolduralım.

Gidilecek Yer	Varış Saati	Hareket Saati
Balon uçuş noktası	05.00	07.30
Otel	08.00	09.30
Avanos	09.40	10.40
Paşabağ	10.50	11.20
Zelve	11.25	12.55
Çavuşin	13.05	14.05
Göreme	14.10	17.10
Ortahisar	17.15	18.15
Ürgüp	18.25	21.55
Otel	22.20	

ÖRNEK

Aşağıdaki parça, yurt içi ve yurt dışı gezi tecrübelerini kişisel blogunda paylaşan bir gezginin Sinop gezisiyle ilgili yazısından alınmıştır. İnceleyelim.



Blog (ağ günlüğü, günce): İnsanların öğrendiklerini, bildiklerini, paylaşmak istediklerini yazarak oluşturdukları günlüğe benzeyen web siteleridir.

Bir fırsat bulup Sinop'a gitmeyi uzun zamandır düşünüyordum. Yaz aylarında işlerim azaldığı için 3-6 Ağustos tarihleri arasında Sinop'ta olacak şekilde gezimi planladım. Biletinizi gidiş tarihinizin çok öncesinden alırsanız daha uygun fiyatlara bulabilirsiniz.



Gezide bir arkadaşım da bana eşlik etti. Biraz aceleye geldiği için uygun fiyata bilet bulduğumuzu söyleyemem.

Bu gezinin bana maliyetini aşağıya yazıyorum.

- Gidişimiz cuma sabah 08.50'de, dönüşümüz ise pazartesi sabah 11.15'teydi. İstanbul-Sinop gidiş dönüş uçak bileti için kişi başı 490 TL ödedik.
- Erfelek Şelalesi, Hamsilos Koyu, İnceburun Feneri ve Akliman Kumsalı görmek istediğimiz yerler arasındaydı. Buralara ulaşım için araç kiraladık. Araç kiralama bedeli 190 TL, yakıt harcamaları da 110 TL tuttu. Benim payıma 150 TL düştü.
- Otelimiz Sinop merkezdeydi. Kişi başı günlük 140 TL ödedik. 3 günlük konaklama maliyeti 420 TL oldu.
- Yemek fiyatları kişi başı ortalama 25 TL civarında. Biz biraz fazla yemiş olabiliriz, Sinop'un mantısı ve nokulu enfes.



Tarihî Sinop Kapalı Cezaevini mutlaka görmelisiniz. Cezaevi 1999 yılında kapatılarak müzeye çevrilmiş. Bir dönem "Anadolu'nun Alkatrazı" olarak da tanınıyormuş.

Sinop'a kesinlikle gidin. Güler yüzlü insanlarla tanışın ve yeşilin keyfini çıkarın.

https://www.muze.gov.tr/tr/muzeler/tarihi-sinop-cezaevi

SIRA SİZDE

Bulunduğunuz şehirden Sinop'a veya Mardin'e 2 günlük seyahat planı yaparak maliyet analizi yapınız.

ÖRNEK

Work and Travel Programı'na katılmak isteyen üniversite öğrencilerinin ödeyecekleri ücretler aşağıda verilmiştir.



Work and Travel (Çalış ve gez) programı üniversite öğrencilerinin, yaz aylarında ABD'de geçici işlerde çalışarak yaşamlarını sürdürmelerine ve bu sürede ABD'yi gezip tanıyarak İngilizcelerini geliştirmelerine olanak sağlamaktadır.

a. Programa katılım için belirlenen fiyatlar:

Mayıs – haziran dönemi:	6000 TL
Temmuz – ağustos dönemi:	6800 TL
Eylül – ekim dönemi:	7200 TL
Kasım – aralık dönemi:	7600 TL
Ocak sonrası katılım:	8000 TL



b. Vize ücreti: 650 TL

c. Uçak bileti: 2800 – 6000 TL (Biletin alındığı tarihe, gidilecek şehir ve eyalete göre değişiklik göstermektedir.)

ç. Harçlık: 2000 – 2800 TL (Amerika'ya ulaşıp işverenlerden alınacak ilk maaşa kadar yaklaşık 2 – 3 hafta geçebilmektedir. Bu süre zarfında götürülen harçlık ile geçinmek gerekmektedir.)

d. Pasaport Defter Ücreti: Work and Travel Vizesi için gerekli olan pasaport defter bedeli (2018 yılı için) 108 TL'dir.
(Work and Travel Programı'na katılan öğrencilerden pasaport harç ücreti alınmamaktadır.)

Bu programa katılmak isteyen Efe hangi tarihte hangi eyalete gideceği konusunda karar vermekte zorlanmaktadır. Efe'nin seyahat planı için öneride bulunarak seyahatinin yaklaşık maliyetini çıkaralım.

Çözüm

Efe eğitime devam ettiği için en erken 15 Haziran'da programa katılabilir. Mayıs – haziran dönemi katılımları fiyat bakımından da en uygundur. Efe üç ay boyunca çalışabilir, böylece hem daha fazla para kazanabilir hem de İngilizcesini geliştirebilir. İnternette yer alan yorumlarda en fazla para kazanılan eyalet Alaska olarak belirtilmiş. Buranın doğal güzelliklerine de övgüler yapılmış. O hâlde dönüş tarihi olarak 15 Eylül'ü, gidilecek yer olarak Alaska'yı belirleyelim.

Efe'nin seyahati için gereken miktarı hesaplayalım.

a. Mayıs – haziran dönemi katılım fiyatı, 6000 TL.

b. Vize ücreti, 650 TL.

c. Uçak bileti, 3400 TL (Erken rezervasyonla daha ucuza alınabilir.).

ç. Harçlık, 2000 TL.

d. Pasaport defter ücreti, 108 TL.

Efe'nin seyahati için $6000 + 650 + 3400 + 2000 + 108 = 12\ 158$ TL gerekmektedir.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda, bir otobüsün zaman çizelgesi gösterilmiştir. Bu otobüs 15 dakika mola verdikten sonra aynı hatta geri dönecektir. Otobüsün geri dönüş çizelgesinde boş bırakılan yerleri doldurunuz.

Kalkış durağı	08.10
Stadyum	08.17
Postane	08.25
Üniversite	08.40
Alışveriş merkezi	08.44
Saat kulesi	08.53
Valilik	08.57
Son durak	09.05

Kalkış durağı	
Valilik	09.28
Alışveriş merkezi	09.41
Postane	
	10.08
Son durak	

2. Interrail Pass, Avrupa Demir Yolları İşletmeleri tarafından uygulanan, her yaştan gezginlere ekonomik ulaşım olanağı sağlayan bir göster-geç (pass) bilet türüdür. Aynı biletle, istenen yerde ve zamanda istenen trene binme olanağı sağlar. Her yıl binlerce kişi bu bilet sayesinde Avrupa'nın istedikleri bölgesine ucuz bir şekilde seyahat etmektedir. Interrail üyesi ülkeler konumlarına göre haritada gösterilen 8 bölgeye ayrılmışlardır.



Aşağıdaki soruları cevaplayıp bir seyahat planı yapınız.

a. İnterrail ile Avrupa'nın hangi bölgesine seyahat etmek isterdiniz? Neden?

b. Böyle bir seyahati kaç kişiyle, ne zaman yapacaksınız?

c. Gidilecek yerlere ilişkin nasıl bir zaman çizelgeniz olacak?

ç. Seyahatin size maliyeti yaklaşık kaç TL olacak?

3. Antalya'nın Kemer ilçesinden yaklaşık 28 km mesafede bulunan ve Çıralı tatil beldesinden 5–10 dakikalık yürüyüşle ulaşılabilen Olimpos, tarihi, doğal güzellikleri ve plajıyla turistlerin ilgisini çekmektedir.

Olimpos hakkında daha fazla bilgi edininiz. Olimpos'a ailenizle birlikte gideceğiniz bir seyahat planlayınız. Seyahatinizin yaklaşık maliyet analizini ve zaman çizelgesini yapınız.



3. ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. $4x+3=2x-5$ denklemini sağlayan x kaçtır?

A) -5 B) -4 C) -1 D) 2 E) 3

2. $\frac{x-2}{3}+x=\frac{3x-1}{2}-1$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-4\}$ B) $\{-3\}$ C) $\{-1\}$ D) $\{2\}$ E) $\{5\}$

3. k bir gerçek sayı olmak üzere $\frac{kx}{2x+3}=\frac{2}{3}$ denkleminin çözüm kümesi $\{-6\}$ olduğuna göre k kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

4. k bir gerçek sayı olmak üzere $3(kx+1)+2=k(x-2)+4x$ denkleminin çözüm kümesi boş küme olduğuna göre k kaçtır?

A) -3 B) -1 C) 0 D) 2 E) 3

5. $\left.\begin{array}{r} 3x+4y=48 \\ 4x+y=-1 \end{array}\right\}$

denklem sistemini sağlayan x kaçtır?

A) -4 B) -1 C) 2 D) 3 E) 5

6. $\frac{4}{a} - \frac{3}{b} = \frac{1}{3}$

$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1$

olduğuna göre $a + b$ toplamı kaçtır?

A) -5 B) -2 C) 3 D) 4 E) 6

7. Bir sayının 4 katı ile 7 eksiğinin yarısının toplamı 10 a eşittir. Bu sayı kaçtır?

A) 3 B) 5 C) 6 D) 8 E) 9

8. Farkları 4 olan iki doğal sayıdan küçük olanın 2 katı ile büyük olanın 3 katının toplamı 32 dir. Buna göre küçük sayı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9. A kentinden B kentine giden bir araç gideceği yolun $\frac{2}{5}$ ini aldıktan sonra mola veriyor. Mola noktasından 18 km ileride aracın lastiği patlıyor. Geriye yolun $\frac{1}{2}$ si kaldığına göre A ve B kentleri arasındaki uzaklık kaç km'dir?

A) 100 B) 120 C) 150 D) 160 E) 180

10. Eşit uzunluktaki iki çubuktan birinin $\frac{1}{9}$ u kesilip atılıyor. Kesilen çubuk eşit uzunlukta 2 parçaya, diğer çubuk ise eşit uzunlukta 3 eşit parçaya ayrılıyor. Bu durumda farklı uzunluktaki parçaların uzunlukları farkı 6 cm oluyor. Buna göre başlangıçta çubukların uzunlukları kaçar cm'dir?

A) 36 B) 45 C) 54 D) 63 E) 72

11. Bir çiçekçideki güller, dokuzarlı yerine beşerli demetlenirse 20 demet fazla elde ediliyor. Buna göre çiçekçideki güllerin sayısı kaçtır?

A) 90 B) 135 C) 180 D) 225 E) 270

12. Eşit uzunluktaki iki mumdan biri yakıldıktan 3 saat sonra diğeri ise yakıldıktan 4 saat sonra bitmektedir. Aynı anda yakıldıktan 1 saat sonra mumların kalan parçalarının uzunlukları farkı 1,5 cm oluyor. Buna göre yakılmadan önce mumların uzunlukları kaçar cm'dir?



A) 15 B) 16 C) 18 D) 20 E) 21

13. Bir giyim mağazasında çalışan Sevim, mağazaya gelen gömlekleri reyondaki boş raflara yerleştirecektir. Sevim, raflara dörder gömlek yerleştirdiğinde 1 gömlek açıkta kalıyor. Raflara beşer gömlek yerleştirdiğinde ise 2 raf boş kalıyor ve 1 rafta da 4 gömlek oluyor. Buna göre mağazaya kaç gömlek gelmiştir?

A) 29 B) 39 C) 49 D) 59 E) 69

14. Bir otoparka 120 otomobil park edebilmektedir. Bu otoparkta a tane otomobil park hâlindeyken otoparka park edebilecek otomobil sayısı $a + 68$, 3a tane otomobil park hâlindeyken otoparka park edebilecek otomobil sayısı b oluyor. Buna göre b kaçtır?



A) 30 B) 34 C) 38 D) 42 E) 45

15. Bir fabrikada, A ve B makinelerinde üretim yapılmaktadır. Bir ürün A makinesinde 20 saniyede, B makinesinde ise 30 saniyede üretilmektedir. Bu fabrikada A ve B makineleri eşit süre çalıştırılarak toplam 120 ürün üretiliyor. Buna göre A ve B makinelerde üretilen ürünlerin sayıları arasındaki fark kaçtır?

A) 18 B) 20 C) 24 D) 27 E) 30

16. 30 kişilik bir grup bir restoranda yemek yemiştir. Bu gruptaki bazı kişiler misafir oldukları için yemek ücreti ödememiştir. Bu nedenle geriye kalan kişilerin her biri payına düşenden 8 TL fazla vererek 60 TL ödemiştir. Buna göre grupta kaç misafir vardır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

17. Gamze, cep telefonuyla yaptığı konuşmalarda A tarifesinde ayda 10 TL sabit ücret ve konuştuğu her dakika için 0,3 TL ödemektedir. B tarifesini seçerse ilk 60 dakikanın her dakikası için 0,5 TL, sonraki her dakika için 0,2 TL ödeyecektir. Cep telefonuyla ayda 100 dakika konuşan Gamze, A yerine B tarifesini seçerse kaç TL kâr eder?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

18. Bir restoranda 4 ya da 6 kişilik olan toplam 25 masa vardır. Bu restoranda aynı anda en çok 122 kişi yemek yiyebilmektedir. Buna göre restorandaki 4 kişilik masa sayısı kaçtır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

19. Mert ve Metin'in eşit miktarda parası vardır. Mert parasıyla 2 şeker ve 3 ciklet, Metin ise parasıyla 6 şeker ve 1 ciklet alabilmektedir. Buna göre bir cikletin fiyatının bir şekerin fiyatına oranı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{3}$ D) 2 E) 3

20. Bir kuruyemişçi, kilosunu 40 TL'den aldığı cevizleri ve kilosunu 25 TL'den aldığı fındıkları belirli bir oranda karıştırarak bir karışım hazırlamıştır. Kuruyemişçinin hazırladığı bu karışımın kilogram maliyeti 28 TL'dir. Buna göre kuruyemişçinin hazırladığı karışımdaki ceviz miktarının fındık miktarına oranı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{4}$

21. Engin, bahçelerine toplam 24 tane meyve fidanı ve süs bitkisi dikecektir. Engin bir meyve fidanını 5 dakikada, bir süs bitkisini ise 2 dakikada dikebiliyor. Engin bu dikim işlemini 72 dakikada tamamladığına göre kaç tane meyve fidanı dikmiştir?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

22. İçi su dolu olan bir kovanın ağırlığı a kg'dır. Kovadaki suyun $\frac{1}{3}$ ü kullanılırsa kovanın ağırlığı b kg oluyor. Buna göre kovadaki suyun tamamının ağırlığı a ve b cinsinden aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $2(a-b)$ B) $3(a-b)$ C) $\frac{3}{2}(a-b)$ D) $2a-b$ E) $3a-b$

23. $3x-4>2x+5$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(1, \infty)$ B) $[1, \infty)$ C) $(3, \infty)$ D) $[9, \infty)$ E) $(9, \infty)$

24. $\frac{1}{2x+5}>\frac{1}{13}$ eşitsizliğini sağlayan kaç tane x doğal sayısı vardır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

25. "Bir sayının 5 fazlasının dörtte üçü aynı sayının 2 katının 3 eksiğinden küçüktür." ifadesinin, x bilinmeyen bu sayıyı temsil etmek üzere, matematik dilindeki karşılığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{3}{4}x+5<2x-3$

B) $\frac{3}{4}(x+5)<2(x-3)$

C) $\frac{3}{4}(x+5)<2x-3$

D) $\frac{3}{4}x-5<2(x-3)$

E) $\frac{3}{4}x-5<2x-3$

26. 3 katının 5 eksiği, 15 fazlasının üçte ikisinden büyük olan en küçük doğal sayı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

27. Bir okuldaki öğrencilerin %36 sı erkektir. Bu okuldaki kız öğrencilerin sayısının 270 den fazla olduğu bilindiğine göre erkek öğrencilerin sayısı en az kaçtır?

A) 117 B) 126 C) 153 D) 180 E) 189

28. Bir koroda şarkı söyleyen kadınların sayısının erkeklerin sayısına oranı $\frac{3}{4}$ tür. Koroda 50 den az kişi olduğuna göre en çok kaç kadın vardır?

A) 12 B) 15 C) 18 D) 21 E) 24

29. Denk bütçeye sahip bir ailenin gelirleri %5 oranında azalıyor. Bu aile, tasarruflar kaleminde 200 TL azaltmaya giderse aile bütçesi tekrar denkleşiyor. Buna göre ailenin azalma olmadan önceki geliri kaç TL'dir?

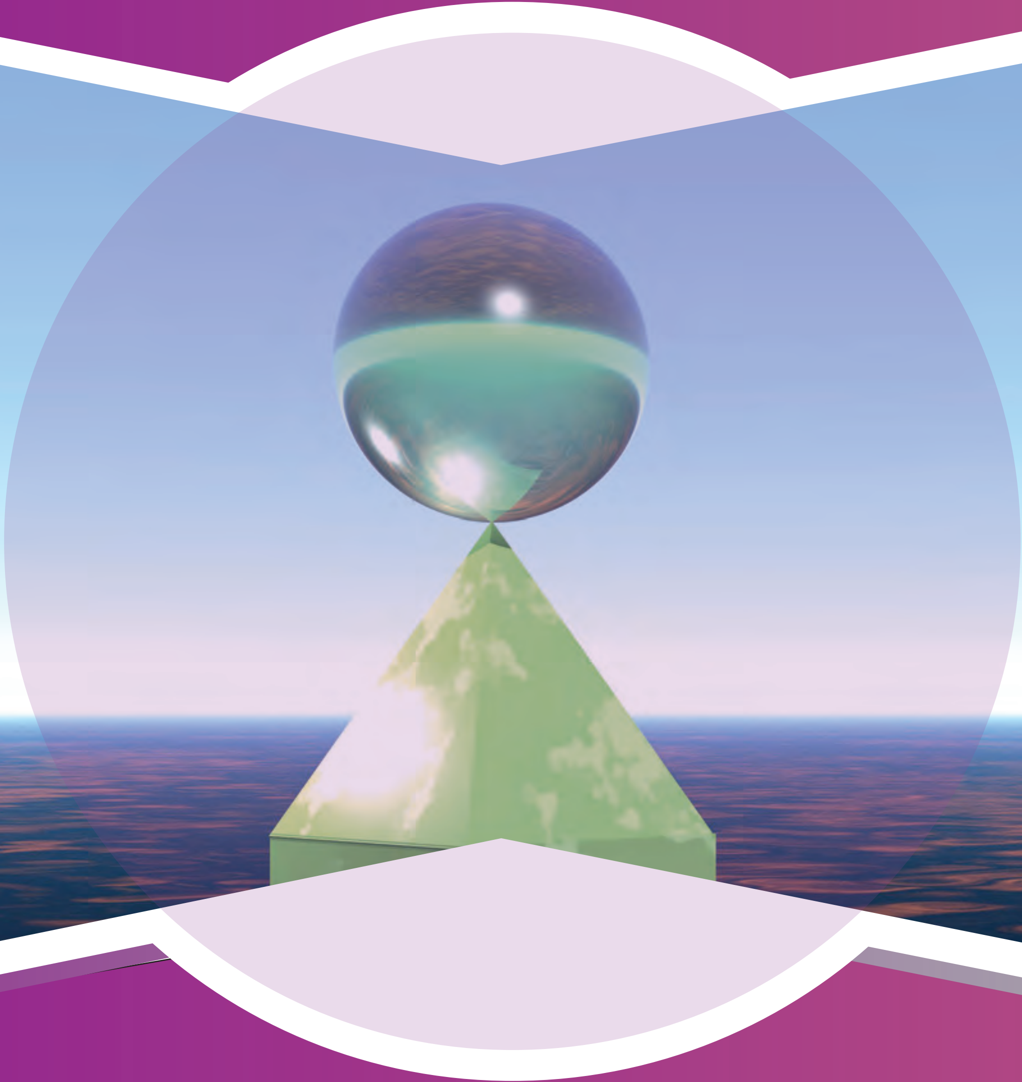
A) 1000 B) 2000 C) 4000 D) 5000 E) 10 000

30. Murat, aylık bütçesini oluşturup gelir gider dengesine baktığında 150 TL açık verdiğini görüyor ve "ayağını yorganına göre uzatmak" istiyor. Bunun için bir süreliğine, giderleri içerisinde yer alan hobi ve eğlence kalemini 100 TL azaltıyor. Ayrıca, iş yerine kendi otomobili yerine servisle giderse ulaşım kaleminin %80 oranında azalacağını hesaplıyor. Murat, giderlerinde yaptığı bu değişiklikler sonucunda bütçesini denkleştiriyor. Buna göre, Murat iş yerine kendi otomobili ile gidecek şekilde yaptığı bütçede ulaşım kalemi kaç TL'dir?

A) 62,5 B) 65 C) 67,5 D) 70 E) 75

4. ÜNİTE

ÇEMBER VE DAİRE



ÇEMBERİN TEMEL ELEMANLARI

ÇEMBERDE AÇILAR

DAİRENİN ÇEVRESİ VE ALANI

HAZIR MIYIZ?

1. Defterinizde bir O noktası alınız. O noktasından 5 cm uzaklıkta olan birkaç nokta işaretleyiniz. İşaretlediğiniz bu noktaların hangi geometrik şekil üzerinde bulunduğunu açıklayınız.

2. Pergel yardımıyla bir çember çiziniz. Çizdiğiniz çemberin merkezini gösteriniz. Bu çemberin bir yarıçapını ve çapını belirtiniz.

3. Çember ve daireyi kendi ifadelerinizle tanımlamaya çalışınız.

4. Çember ile daire arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

5. Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerleri uygun ifadelerle tamamlayınız.

   a. Düzlemde sabit bir noktaya eşit uzaklıkta olan noktaların kümesine .... denir.

   b. Bir çemberin çap uzunluğu, yarıçap uzunluğunun .... eşittir.

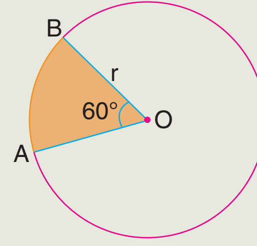
   c. Bir çemberin çevresi, yarıçap uzunluğunun .... eşittir.

   ç. Bir çemberde aynı yayı gören merkez açıların ölçüleri ....

   d. Yarıçap uzunluğu .... birim olan bir çemberde ölçüsü 90° olan bir merkez açının gördüğü yayın uzunluğu π birimdir.

   e. Yarıçap uzunluğu 3 birim olan bir dairenin alanı .... π birimkaredir.

   f. Merkez açısının ölçüsü 45° ve yarıçapının uzunluğu r olan daire diliminin alanı ....

6. 

   a. Şekildeki AB yayının uzunluğunu veren bağıntıyı yazınız.

   b. Şekildeki boyalı bölgenin alanını veren bağıntıyı yazınız.

   c. r yarıçap uzunluğu 10 cm olduğuna göre AB yayının uzunluğunu hesaplayınız.

   ç. r yarıçap uzunluğu 10 cm olduğuna göre boyalı bölgenin alanını hesaplayınız.

7. Çevresi 6π birim olan dairenin alanını bulunuz.

8. Çevrenizden çembere benzer ne gibi örnekler verebilirsiniz? Aynı şekilde daire örnekleri veriniz.

9. Konuşma dilinde “teğet geçmek” ne demektir?

10. Ekvator, çember midir? Daire midir?

1. BÖLÜM ÇEMBERİN TEMEL ELEMANLARI

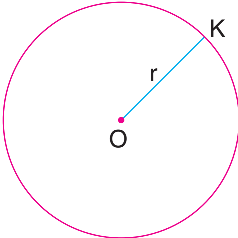
Çemberi Tanıyalım

Türkçe sözlükte pergel, yay veya çember çizmekte ve ölçmekte kullanılan alet olarak tanımlanmaktadır. Osmanlı Türkçesi Sözlüğünde ise, ölçmeye ve daire çizmeye yarayan açılır kapanır iki bacaktan oluşan mühendis aletinin adıdır. Pergel sözlüklerde benzer ifadelerle tanımlanmaktadır. Kullanım açısından bakıldığında bir ayağının sabit olup diğerinin onun etrafında dolanması pergelin en büyük özelliğidir. Zaten bu özelliği ile de şiirlerde yer almıştır. Pergel ve şiir yan yana geldiği zaman hemen akıllara Mevlana gelmektedir.

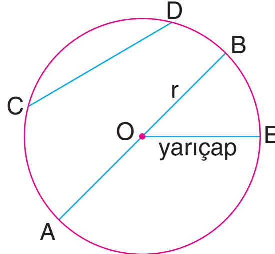
Mevlana *"Biz pergel gibiyiz. Bir ayağımız din üzerinde sağlamca durur, öteki ayağımız yetmiş iki milleti dolaşır."* diyerek sevgisinde sınır tanımadığını göstermektedir.

Divan şiirinde ise pergel, yine aynı kullanım özelliğine bağlı olarak yani bir ayağının sabit diğerinin onun etrafında dolanması şekli ile ele alınmaktadır. Pergel, her tarafı dolansa da sonunda yine başa dönmektedir.

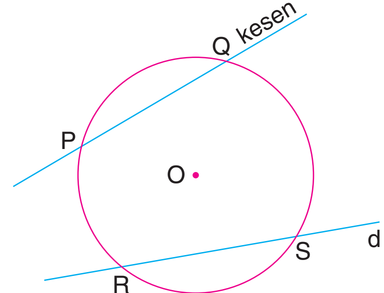
Kaynak: Pergelin Bir Ayağı Şair, Diğer Ayağı Hayal Dünyası: Divan Şiirinde Pergel



1. şekil



2. şekil



3. şekil

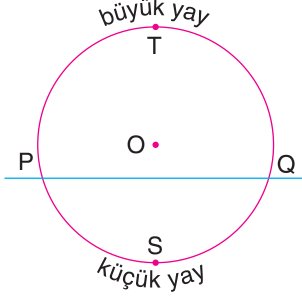
Düzlemde sabit bir noktaya eşit uzaklıkta olan noktaların kümesine çember denir. Sabit olan bu nokta çemberin merkezidir. 1. şekildeki çemberin merkezi O noktasıdır.

Çemberin merkezi ile üzerindeki bir noktayı birleştiren doğru parçasına yarıçap denir. 1. şekilde $[OK]$ çemberin bir yarıçapıdır. $|OK| = r$ çemberin yarıçap uzunluğudur.

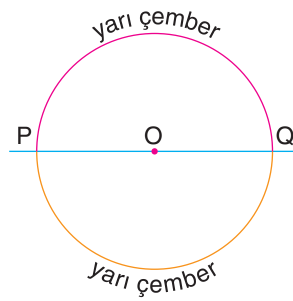
Çember üzerindeki iki farklı noktayı birleştiren doğru parçasına kiriş denir. Şekilde $[CD]$ çemberin bir kirişidir (2. şekil).

Çemberin merkezinden geçen kirişe çap denir. 2. şekilde verilen $[AB]$ çemberin bir çapıdır. Çap, çember üzerindeki bir noktadan çizilebilen en uzun kiriştir. Çapın uzunluğu, yarıçap uzunluğunun 2 katıdır.

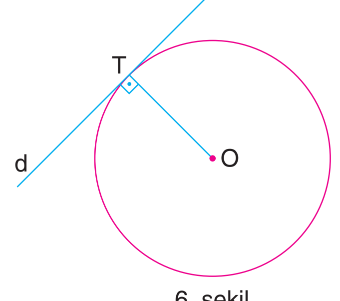
Çemberi iki farklı noktada kesen bir doğruya çemberin keseni denir. Şekilde PQ doğrusu çemberin bir kesenidir (3. şekil). Çemberin bir kirişini taşıyan doğru da çemberin bir kesenidir. Şekilde $[RS]$ kirişini taşıyan d doğrusu çemberin bir kesenidir.



4. şekil



5. şekil



6. şekil

Merkezden geçmeyen bir kesen çemberi eş olmayan iki parçaya ayırır. Bu parçalardan biri küçük (minör) yay, diğeri büyük (majör) yaydır (4. şekil). Şekilde $\overset{\frown}{PSQ}$ küçük yay, $\overset{\frown}{QTP}$ büyük yaydır.

PQ keseni merkezden geçiyor ise kesenin çemberden ayırdığı iki yay eş olur. Yayların her birine yarı çember denir (5. şekil).

Çemberle bir ortak noktası olan doğruya teğet denir. Yandaki şekilde d doğrusu O merkezli çembere T noktasında teğettir. T noktasına teğetin değme noktası denir. Teğetin değme noktasını merkeze birleştiren doğru parçası teğete diktir. $d \perp [TO]$ (6. şekil).

ÖRNEK

Çemberin elemanlarıyla ilgili aşağıdaki soruları cevaplayalım.

a. Çemberin merkezinden geçen her kiriş aynı zamanda bir çap mıdır?

b. Çemberin, herhangi bir kirişi ile kaç ortak noktası vardır?

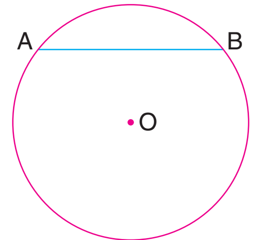
c. Çembere ait bir kirişin taşıyıcı doğrusu çemberin nesidir?

ç. Çemberin en uzun kirişi çemberin bir çapı mıdır?

d. Bir teğetin değme noktasından başka çemberle ortak noktası var mıdır?

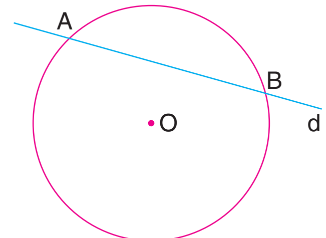
Çözüm

a. Çemberin merkezinden geçen her kiriş bir çaptır.



b. Çemberin, herhangi bir kirişi ile iki ortak noktası vardır. Şekildeki A ve B noktaları çemberle kirişin ortak noktalarıdır. A ve B noktaları hariç $[AB]$ doğru parçasının diğer noktaları çembere ait değildir.

c. Çembere ait bir kirişin taşıyıcı doğrusunu çizersek çemberin bir kesenini elde ederiz. Şekilde $[AB]$ kirişinin taşıyıcı doğrusu olan d doğrusu çemberin bir kesenidir.



ç. Çemberin en uzun kirişi çemberin bir çapıdır.

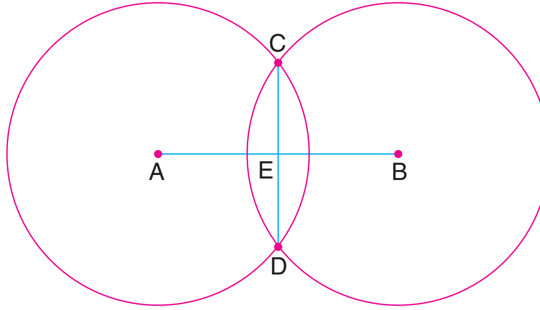
d. Teğetin, değme noktasından başka çemberle ortak noktası yoktur.

ÖRNEK

Pergel yardımıyla bir doğru parçasının orta noktasını bulalım.

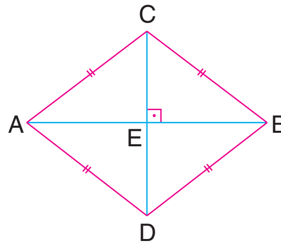
Çözüm

Bir AB doğru parçası çizelim. Pergeli $|AB|$ uzunluğunun yarısından daha büyük açıp pergelin açıklığını bozmadan A ve B merkezli iki çember çizelim. Çemberlerin kesim noktaları C ve D olsun. C ile D'yi birleştiren doğru parçasını çizelim. CD doğru parçasının AB doğru parçasını kestiği E noktası aradığımız noktadır.



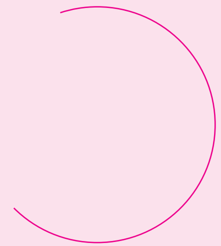
Çözümümüzü irdeleyelim.

$|AC|$, $|CB|$, $|BD|$ ve $|DA|$ çemberlerin yarıçap uzunluklarıdır. Çemberleri pergelin açıklığını bozmadan çizdiğimiz için $|AC| = |CB| = |BD| = |DA|$ olur. O hâlde ACBD bir eşkenar dörtgendir. Eşkenar dörtgende köşegenler birbirini ortaladığından $|AE| = |EB|$ olur. Bu da bize E noktasının AB doğru parçasının orta noktası olduğunu gösterir.



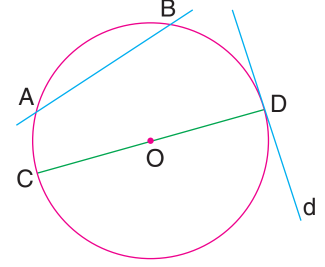
BULMACA

Aysun yandaki çemberi çizerken pergelin ucunu kaydırmış ve merkezin yerini kaybetmiştir. Pergelin açıklığı bozulmadığına göre Aysun'un çemberi tamamlaması için merkezi bulmasına yardımcı olabilir misiniz? Çemberin merkezini sadece pergel kullanarak bulmalısınız.



ALIŞTIRMALAR

1. Şekildeki çemberin merkezini, çapını, bir kirişini, AB küçük (minör) yayını ve teğetini belirtiniz.



2. Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerleri uygun ifadelerle tamamlayınız.

   a. Çemberi bir noktada kesen doğruya .... denir.

   b. Çemberi iki farklı noktada kesen doğruya .... denir.

   c. Kesenin çember içinde kalan parçasına .... denir.

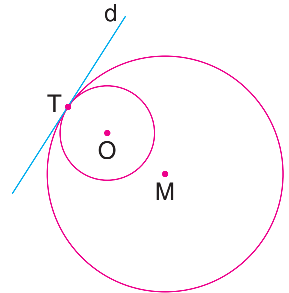
   ç. Çemberde en uzun kiriş .... geçer.

   d. Merkezden geçen kirişe .... denir.

   e. Çember üzerindeki iki nokta arasında kalan parçaya .... denir.

3. Aynı merkezli, farklı yarıçaplı iki çember çizdiğinizde içteki çemberin teğeti, dıştaki çemberin nesi olur?

4. Şekildeki O merkezli çembere T noktasında teğet olan d doğrusu M merkezli çembere de T noktasında teğet midir? T, O ve M noktaları doğrusal mıdır? Açıklayınız.



5. Aşağıdaki ifadeleri inceleyerek doğru olanların başına “D”, yanlış olanların başına “Y” yazınız.

   ( ) a. Bir çemberde iki çap daima birbirine diktir.

   ( ) b. Bir çemberde iki kiriş birbirine eşit olabilir.

   ( ) c. Çemberde kesen ile teğet farklı doğrulardır.

   ( ) ç. Kiriş bir doğru parçası, kesen ise bir doğrudur.

2. BÖLÜM ÇEMBERDE AÇILAR

Çemberde Açı Özellikleri

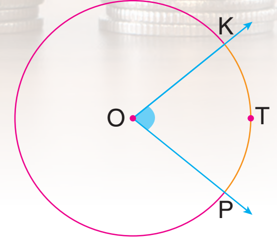
Yanda gösterilen madenî para 1948, 1949, 1950 ve 1951 yıllarında basılmıştır. Halk arasında "Delikli Kuruş" olarak da bilinir. Ağırlığı 3,15 gramdır. Çapı 21 mm ve kalınlığı 1,15 mm'dir. 1948 ve 1965 yılları arasında tedavülde kalmıştır. Bu parayı kullanarak verilen bir açının iki katı ölçüye sahip olan açıyı çizebilir misiniz? Deneyiniz. Çözümünü ilerleyen sayfalarda bulabilirsiniz.



Merkez Açı

Köşesi çemberin merkezinde bulunan açıya merkez açı denir. Yandaki şekilde KOP açısı bir merkez açıdır.

İki noktası merkez açının kolları üzerinde olan ve diğer noktaları açının iç bölgesinde bulunan bir yaya merkez açının gördüğü yay denir. Yandaki şekilde KOP merkez açısının gördüğü yay $\overset{\frown}{KTP}$ dır.

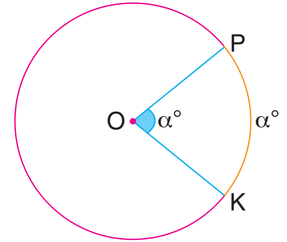


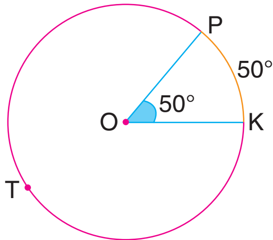
Yayların Derece Cinsinden Ölçüsü

Bir yayın derece cinsinden ölçüsü onu gören merkez açının derece cinsinden ölçüsüne eşittir.

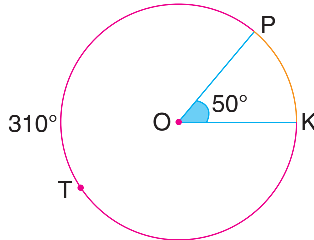
Yandaki şekilde $m(\widehat{POK}) = \alpha°$ olduğundan $m(\overset{\frown}{PK}) = \alpha°$ dir.

Bir çemberde küçük yayın ölçüsü $\alpha°$ ise büyük yayın ölçüsü $360° - \alpha°$ dir. Yarı çemberlerin ölçüleri 180° dir.

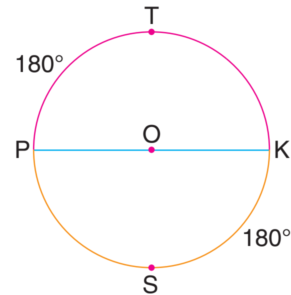




$m(\overset{\frown}{KP}) = 50°$



$m(\overset{\frown}{PTK}) = 360° - 50° = 310°$

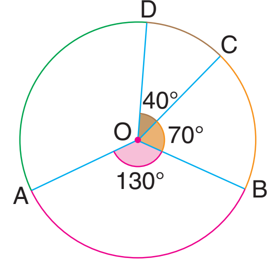


$m(\overset{\frown}{PSK}) = m(\overset{\frown}{KTP}) = 180°$

Yarı çemberi gören merkez açıya doğru açı, çemberin tamamını gören merkez açıya tam açı denir.

ÖRNEK

Yandaki O merkezli çemberde;



$m(\widehat{AOB}) = 130°$

$m(\widehat{BOC}) = 70°$

$m(\widehat{COD}) = 40°$ dir.

AB, BC, CD ve DA yaylarının ölçülerini bulalım.

Çözüm

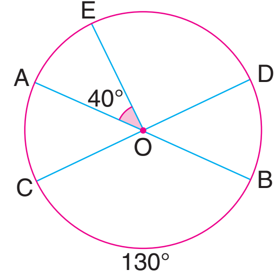
Bir yayın ölçüsü onu gören merkez açının ölçüsüne eşit olduğundan aşağıdaki eşitlikleri yazabilir, gerekli işlemleri yaparak DA yayının ölçüsünü bulabiliriz.

$m(\overset{\frown}{AB}) = 130°$, $m(\overset{\frown}{BC}) = 70°$ ve $m(\overset{\frown}{CD}) = 40°$ olur.

$$\begin{aligned} m(\overset{\frown}{DA}) &= 360° - \left(m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{BC}) + m(\overset{\frown}{CD})\right) \\ &= 360° - (130° + 70° + 40°) \\ &= 360° - 240° \\ &= 120° \end{aligned}$$

ÖRNEK

Yandaki O merkezli çemberde;



$[AB]$ ve $[CD]$ çap

$m(\widehat{AOE}) = 40°$

$m(\overset{\frown}{CB}) = 130°$

olduğuna göre BD ve DE yaylarının ölçülerini bulalım.

Çözüm

$[CD]$ çap olduğundan çemberi iki yarı çembere ayırır. Öyleyse aşağıdaki eşitliği yazabilir ve BD yayının ölçüsünü bulabiliriz.

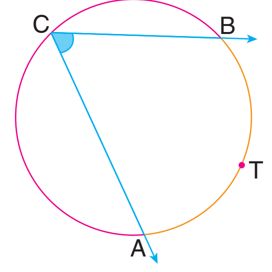
$$\begin{aligned} m(\overset{\frown}{CB}) + m(\overset{\frown}{BD}) &= 180° \\ 130° + m(\overset{\frown}{BD}) &= 180° \\ m(\overset{\frown}{BD}) &= 180° - 130° \\ m(\overset{\frown}{BD}) &= 50° \end{aligned}$$

Bir yayın ölçüsü onu gören merkez açının ölçüsüne eşit olduğundan AOE açısının gördüğü EA yayının ölçüsü 40° dir.

$[AB]$ çap olduğundan çemberi iki yarı çembere ayırır. Öyleyse aşağıdaki eşitliği yazabilir ve DE yayının ölçüsünü bulabiliriz.

$$\begin{aligned} m(\overset{\frown}{BD}) + m(\overset{\frown}{DE}) + m(\overset{\frown}{EA}) &= 180° \\ 50° + m(\overset{\frown}{DE}) + 40° &= 180° \\ m(\overset{\frown}{DE}) &= 180° - 50° - 40° \\ m(\overset{\frown}{DE}) &= 90° \end{aligned}$$

Çevre Açı

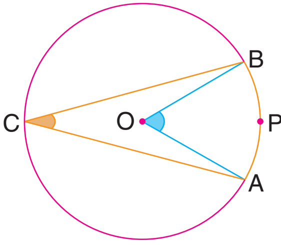


Köşesi çember üzerinde bulunan ve kenarları çemberi (köşesinden farklı) iki noktada kesen bir açıya çevre açı denir. Şekilde $\widehat{BCA}$ bir çevre açıdır.

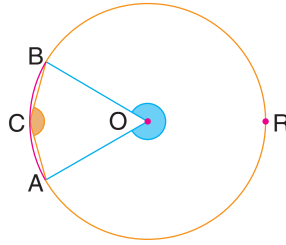
İki noktası çevre açının kolları üzerinde olan ve diğer noktaları açının iç bölgesinde bulunan bir yaya çevre açının gördüğü yay denir. BCA çevre açısının gördüğü yay $\overset{\frown}{ATB}$ dır.

Bir çemberde çevre açının gördüğü yay küçük yay, büyük yay ya da yarı çember olabilir.

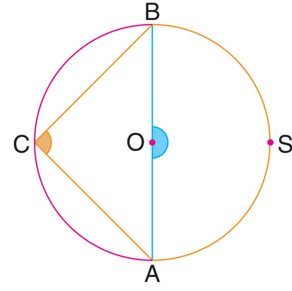
Aşağıdaki 1. şekilde verilen BCA çevre açısının gördüğü $\overset{\frown}{APB}$ küçük yay, 2. şekilde verilen BCA çevre açısının gördüğü $\overset{\frown}{ARB}$ büyük yay ve 3. şekilde verilen BCA çevre açısının gördüğü $\overset{\frown}{ASB}$ yarı çemberdir.



1. şekil



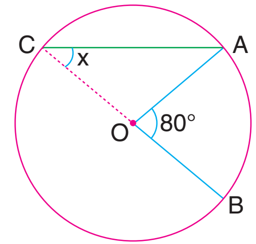
2. şekil



3. şekil

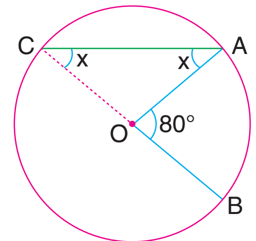
ÖRNEK

Şekilde O merkezli çember ve ölçüsü 80° olan BOA açısı verilmiştir. $[OB]$ doğru parçasının uzantısı çemberi C noktasında kestiğine göre ACB açısının ölçüsünü bulalım.



Çözüm

Yandaki şekilde $|OA| = |OC| = r$ olduğundan COA üçgeni bir ikizkenar üçgendir. Buna göre, $m(\widehat{OCA}) = m(\widehat{OAC}) = x$ tir.



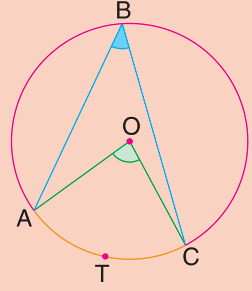
Bir üçgende bir dış açının ölçüsü kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşit olduğundan $2x = 80°$ dir.

Buradan $x = 40°$ bulunur.

BİLGİ

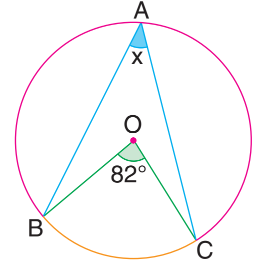
Bir çevre açının ölçüsü aynı yayı gören merkez açının ölçüsünün yarısına eşittir. Yandaki şekilde ATC yayını gören ABC çevre açısı ve AOC merkez açısı için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$m(\widehat{ABC}) = \frac{m(\widehat{AOC})}{2}$$



ÖRNEK

Yandaki şekilde çemberin merkezi O noktasıdır. $m(\widehat{BOC}) = 82°$ olduğuna göre BAC açısının ölçüsü x kaç derecedir? Bulalım.



Çözüm

Yandaki şekilde BAC çevre açısı ve BOC merkez açısı aynı yayı gördüğünden "Bir çevre açının ölçüsü aynı yayı gören merkez açının ölçüsünün yarısına eşittir." önermesi gereğince aşağıdaki eşitliği yazabilir, x değerini bulabiliriz.

$$m(\widehat{BAC}) = \frac{m(\widehat{BOC})}{2} \Rightarrow x = \frac{82°}{2} = 41°$$

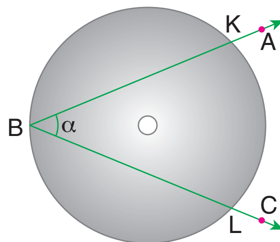
ÖRNEK

Ortası delik olan bir madenî daire yardımıyla ölçüsü yandaki ABC açısının ölçüsünün iki katına eşit olan bir açı çizelim.

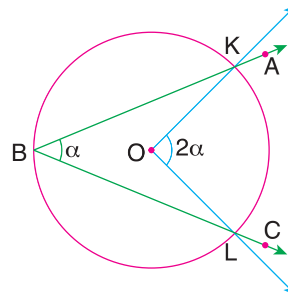
Çözüm

Madenî daireyi açının köşesi olan B noktasına değecek biçimde yerleştirip çevresinden kalemle geçerek bir çember çizelim. [BA ve [BC ışınlarının çemberi kestiği noktaları K ve L ile gösterelim (1. şekil).

Dairenin ortasındaki delikten çemberin merkezini işaretleyerek O ile adlandıralım. [OK ve [OL ışınlarını çizelim (2. şekil). Merkez açının ölçüsü aynı yayı gören çevre açının ölçüsünün iki katı olduğundan $m(\widehat{KOL}) = 2 \cdot m(\widehat{ABC}) = 2\alpha$ olur.



1. şekil

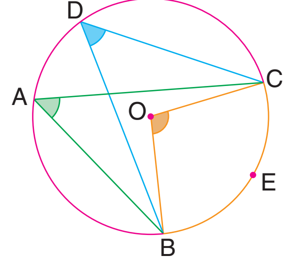


2. şekil

ÖRNEK

"Bir çemberde aynı yayı gören iki çevre açısının ölçüleri eşittir." önermesinin doğruluğunu gösterelim.

Çözüm



Şekilde BAC ve BDC çevre açıları ile BOC merkez açısı BEC yayını görmektedir.

Buna göre aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

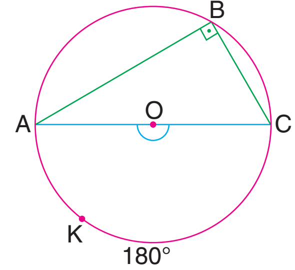
$$m(\widehat{BAC}) = \frac{m(\widehat{BOC})}{2}$$

$$m(\widehat{BDC}) = \frac{m(\widehat{BOC})}{2}$$

Yukarıdaki iki eşitliğin sağ tarafları eşit olduğu için sol tarafları da eşittir. O hâlde aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BDC})$$

ÖRNEK



"Çapı gören çevre açısının ölçüsü 90° dir." önermesinin doğruluğunu gösterelim.

Çözüm

O merkezli ve $[AC]$ çaplı bir çember çizelim. Çember üzerinde bir B noktası alarak ABC çevre açısını oluşturalım.

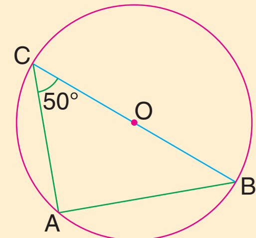
$[AC]$ çapı, çemberi iki yarı çembere ayırdığından ABC çevre açısının gördüğü AKC yayı yarım çemberdir. Yarım çember yayının ölçüsü 180° olduğundan AKC yayını gören AOC merkez açısının ölçüsü de 180° dir.

"Bir çevre açının ölçüsü aynı yayı gören merkez açının ölçüsünün yarısına eşittir." önermesi gereğince aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$m(\widehat{ABC}) = \frac{m(\widehat{AOC})}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

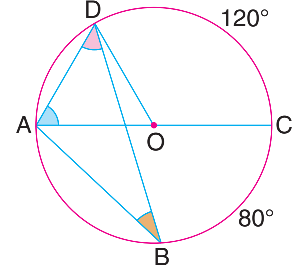
O hâlde çapı gören ABC çevre açısının ölçüsü 90° dir.

SIRA SİZDE



Yandaki şekilde O noktası çemberin merkezidir. ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı O noktasından geçmektedir. $m(\widehat{ACB}) = 50^\circ$ olduğuna göre ABC açısının ölçüsü kaç derecedir?

ÖRNEK



Yandaki şekilde $[AC]$ çap, $m(\overset{\frown}{CD}) = 120°$ ve $m(\overset{\frown}{BC}) = 80°$ olduğuna göre DAC, BDA ve ABD açılarının ölçülerini bulalım.

Çözüm

“Aynı yayı gören çevre açının ölçüsü merkez açının ölçüsünün yarısına eşittir.” önermesi gereğince aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$m(\widehat{DAC}) = \frac{m(\widehat{DOC})}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$$

O hâlde DAC açısının ölçüsü 60° dir.

ABC yayı yarım çember olduğundan ölçüsü 180° dir. BC yayının ölçüsü 80° olduğundan AB yayının ölçüsünü aşağıdaki gibi bulabiliriz.

$$m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{ABC}) - m(\overset{\frown}{BC}) = 180° - 80°$$

$$m(\overset{\frown}{AB}) = 100°$$

AB yayını gören BDA çevre açısının ölçüsü, AB yayının ölçüsünün yarısına eşittir.

$$m(\widehat{BDA}) = \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{2} = \frac{100°}{2} = 50°$$

O hâlde BDA açısının ölçüsü 50° dir.

Şekildeki ADC yayının ölçüsü 180° dir. DC yayının ölçüsü 120° olduğundan AD yayının ölçüsünü aşağıdaki gibi bulabiliriz.

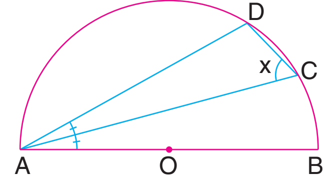
$$m(\overset{\frown}{AD}) = m(\overset{\frown}{ADC}) - m(\overset{\frown}{DC}) = 180° - 120° = 60°$$

ABD açısı AD yayını gören çevre açı olduğundan aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$m(\widehat{ABD}) = \frac{m(\overset{\frown}{AD})}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$$

O hâlde ABD açısının ölçüsü 30° dir.

ÖRNEK

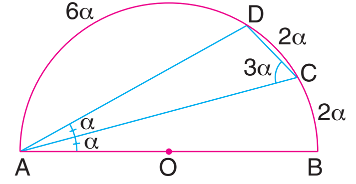


Yandaki şekilde $[AB]$ çaplı yarım çember verilmiştir.

$m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{CAB})$
$2m(\widehat{DA}) = 3m(\widehat{BD})$

olduğuna göre $m(\widehat{ACD}) = x$ kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm



$m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{CAB}) = \alpha$ olsun.

$\left.\begin{aligned} m(\widehat{BC}) &= 2\alpha \\ m(\widehat{CD}) &= 2\alpha \end{aligned}\right\}$ (Çevre açının ölçüsü aynı yayı gören merkez açının ölçüsünün yarısına eşittir.)

$$\begin{aligned} m(\widehat{BD}) &= m(\widehat{BC}) + m(\widehat{CD}) \quad \text{(Şekilden)} \\ &= 2\alpha + 2\alpha \\ &= 4\alpha \end{aligned}$$

$$2m(\widehat{DA}) = 3m(\widehat{BD}) \Rightarrow 2m(\widehat{DA}) = 3 \cdot 4\alpha$$

$$= 12\alpha$$

$$m(\widehat{DA}) = \frac{12\alpha}{2}$$

$$= 6\alpha$$

BC, CD ve DA yaylarının ölçülerinin toplamının 180° olduğunu şekilden söyleyebiliriz. Bu eşitliği yazalım ve α değerini bulalım.

$$\begin{aligned} m(\widehat{BC}) + m(\widehat{CD}) + m(\widehat{DA}) &= 180° \\ 2\alpha + 2\alpha + 6\alpha &= 180° \\ 10\alpha &= 180° \\ \alpha &= 18° \end{aligned}$$

Şekilde ACD açısı DA yayını gördüğünden ve çevre açının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşit olduğundan aşağıdaki eşitliği yazabilir, gerekli işlemleri yaparak ACD açısının ölçüsünü bulabiliriz.

$$\begin{aligned} m(\widehat{ACD}) &= \frac{m(\widehat{AD})}{2} \\ &= \frac{6\alpha}{2} \\ &= 3\alpha \\ &= 3 \cdot 18° \\ &= 54° \end{aligned}$$

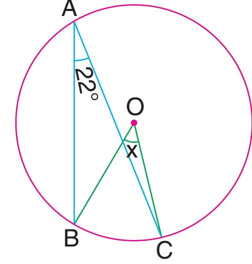
O hâlde ACD açısının ölçüsü 54° dir.

ALIŞTIRMALAR

1. Yandaki şekilde O noktası çemberin merkezidir.

$m(\widehat{CAB}) = 22°$

olduğuna göre $m(\widehat{COB}) = x$ kaç derecedir?

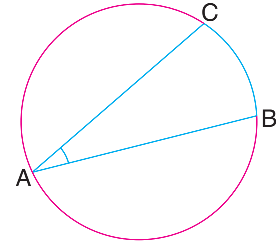


2. Yandaki şekilde

$m(\widehat{CAB}) = (3\alpha - 6)°$

$m(\widehat{BC}) = (5\alpha)°$

olduğuna göre $m(\widehat{CAB})$ kaç derecedir?

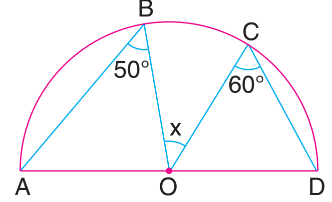


3. Yandaki şekilde O noktası çemberin merkezidir.

$m(\widehat{OBA}) = 50°$

$m(\widehat{DCO}) = 60°$

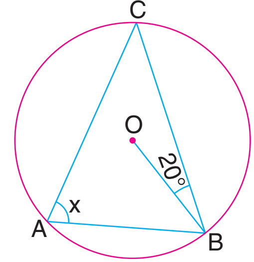
olduğuna göre $m(\widehat{BOC}) = x$ kaç derecedir?



4. Yandaki şekilde O çemberin merkezidir.

$m(\widehat{OBC}) = 20°$

olduğuna göre $m(\widehat{CAB}) = x$ kaç derecedir?

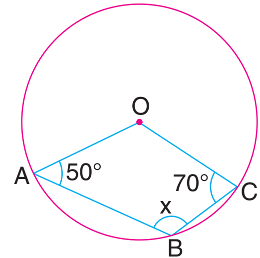


5. Yandaki şekilde O noktası çemberin merkezidir.

$m(\widehat{OAB}) = 50°$

$m(\widehat{BCO}) = 70°$

olduğuna göre $m(\widehat{ABC}) = x$ kaç derecedir?



6. Bir çemberde çevre açının ölçüsü 25° dir. Bu açı ile aynı yayı gören merkez açının ölçüsünü bulunuz. Şekil çiziniz.

3. BÖLÜM DAİRENİN ÇEVRESİ VE ALANI

Dairenin Çevre ve Alan Bağıntıları

Dairenin Çevresi

Dünya'nın etrafını saracak uzunlukta bir ip bulalım ve bu iple dünyayı sıkı sıkı saralım. Dünya'yı, çevresi 40 000 kilometre olan bir küre olarak düşünürsek bu ipin uzunluğu da 40 000 kilometre olacaktır. Şimdi bu ipi 10 metre uzatalım ve tekrar Dünya'nın etrafını saralım. İlk duruma göre, ip daha uzun olduğu için bu sarma biraz gevşek olacak ve ip yerden (Dünya'dan) belirli bir miktar yükselecektir.

Bu yüksekliğin ne kadar olacağını tahmin ediniz. Sorunun çözümü bir sonraki sayfada verilmiştir.

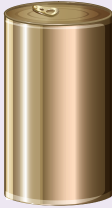


ETKİNLİK

★ Konserve kutusunun tabanının çapını ölçünüz.

★ CD'nin, 50 kuruşun ve 1 liranın çapını ölçünüz.

★ Konserve kutusunun, CD'nin, 50 kuruşun ve 1 liranın çevresini iple sıkıca sarınız. Sonra ipleri çözerek her birinin uzunluğunu dikkatlice ölçünüz.







★ Bulduğunuz ölçüleri aşağıdaki tabloya yazınız.

Cisim	Çevre	Çap	Çevre / Çap
Konserve kutusu			
CD			
50 kr.			
1 TL			

★ Bulduğunuz çevre / çap oranlarının yaklaşık olarak aynı olduğunu söyleyebilir misiniz?

Yukarıdaki etkinlikte de gördüğünüz gibi, tüm dairelerin çevresinin çapına oranı sabit olup 3 civarında bir sayıdır. Bu oran aslında bir irrasyonel sayı olan π sayısına eşittir.

BİLGİ

Yarıçap uzunluğu r olan bir dairenin çevresi $2\pi r$ ye eşittir. Bu dairenin çevresi Ç ile gösterilirse Ç $= 2\pi r$ bağıntısı elde edilir.

ÖRNEK

Yarıçap uzunluğu 6 birim olan bir dairenin çevresi kaç birimdir? Bulalım.

Çözüm

Ç $= 2\pi r$ bağıntısında r yerine 6 yazalım ve çevre uzunluğunu bulalım.

$$\text{Ç} = 2\pi r$$
$$= 2 \cdot \pi \cdot 6$$
$$= 12\pi$$

Yarıçap uzunluğu 6 birim olan bir dairenin çevresi 12π birimdir.

SIRA SİZDE

Çevresi 18π birim olan dairenin çapı kaç birimdir?

ÖRNEK

40 000 kilometre uzunluğunda bir ip ile Dünya'nın etrafını sıkı sıkı sarabildiğimizi kabul edelim. Bu ipi 10 metre daha uzatıp Dünya'nın etrafını tekrar saralım. Bu durumda ip yerden ne kadar yükselir? Bulalım.

Çözüm

40 000 kilometre ve 10 metre karşılaştırıldığında bu yüksekliğin çok az olacağı tahmin edilir. Fakat sonuç oldukça şaşırtıcıdır.

Dünya'nın yarıçap uzunluğu r metre olsun. İpi 10 metre uzattığımızda ipin yerden yüksekliği h metre olsun. Öyleyse aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$2\pi r = 40\ 000\ 000 \ \ldots\ldots\ldots\ldots ①$$
$$2\pi(r + h) = 40\ 000\ 010 \ \ldots\ldots\ldots\ldots ②$$



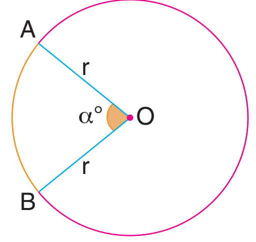
40 000 km = 40 000 000 m

Yukarıdaki ② numaralı eşitlikten ① numaralı eşitliği çıkaralım.

$$2\pi(r + h) - 2\pi r = 2\pi h = 10$$
$$h = \frac{10}{2\pi}$$
$$\approx 1{,}6 \text{ metre}$$

O hâlde ip yerden yaklaşık olarak 160 cm yükselir.

Merkez Açı ve Gördüğü Yayın Uzunluğu



Yandaki gibi O merkezli, r yarıçaplı bir çember çizelim. AOB açısının ölçüsü α derece olsun. Şekle göre, AB yayının ölçüsü α derecedir. Yani

$$m(\widehat{AB}) = \alpha° \text{ dir.}$$

Şimdi aşağıdaki orantıyı yazarak AB yayının uzunluğunu veren bağıntıyı elde edelim. AB yayının uzunluğunu $|\widehat{AB}|$ biçiminde gösterelim.

360 dereceye — $2\pi r$ uzunluk karşılık gelirse

α dereceye — $|\widehat{AB}|$ uzunluk karşılık gelir.

Doğru orantı

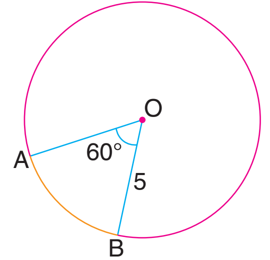
$$|\widehat{AB}| = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$$

BİLGİ

Bir çemberde AB yayının uzunluğu $|\widehat{AB}|$; AB yayını gören merkez açının ölçüsü $\alpha°$; yarıçap uzunluğu r olmak üzere aşağıdaki bağıntı geçerlidir.

$$|\widehat{AB}| = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$$

ÖRNEK



Yandaki şekilde O noktası çemberin merkezidir.

$m(\widehat{AOB}) = 60°$

$r = 5$ birim

olduğuna göre AB yayının uzunluğunu bulalım.

Çözüm

$|\widehat{AB}| = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$ bağıntısında verilen değerleri yerine yazalım ve AB yayının uzunluğunu bulalım.

$$|\widehat{AB}| = \frac{60}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 5$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 10\pi$$

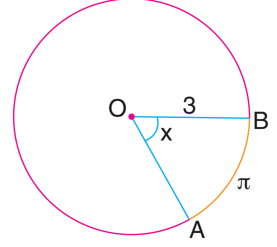
$$= \frac{5}{3}\pi$$

O hâlde AB yayının uzunluğu $\frac{5}{3}\pi$ birimdir.

SIRA SİZDE

Yarıçapı 12 birim olan bir çemberin 75° lik bir çevre açısının gördüğü yayın uzunluğunu bulunuz.

ÖRNEK



Yandaki şekilde O noktası çemberin merkezidir.

$r = 3$ birim

$|\overset{\frown}{AB}| = \pi$ birim

olduğuna göre $m(\widehat{AOB}) = x$ kaç derecedir? Bulalım.

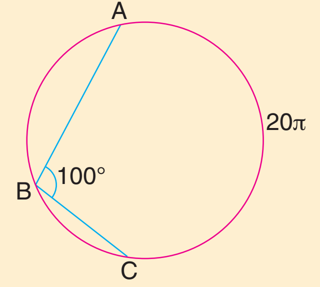
Çözüm

$|\overset{\frown}{AB}| = \dfrac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$ bağıntısında verilen değerleri yerine yazalım ve x değerini bulalım.

$$\pi = \frac{x}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3 \Rightarrow 1 = \frac{x}{60}$$
$$\Rightarrow x = 60$$

O hâlde AOB açısının ölçüsü 60° dir.

SIRA SİZDE



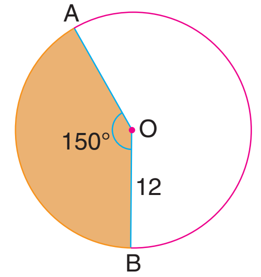
Yandaki çemberde,

$m(\widehat{ABC}) = 100°$

$|\overset{\frown}{CA}| = 20\pi$ birim

olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğunu bulunuz.

ÖRNEK



Yandaki şekilde O noktası çemberin merkezidir.

$r = 12$ birim

$m(\widehat{AOB}) = 150°$

olduğuna göre boyalı bölgenin çevresini bulalım.

Çözüm

Önce AB yayının uzunluğunu bulalım.

$$|\overset{\frown}{AB}| = \frac{150}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 12$$
$$= \frac{5}{12} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 12$$
$$= 10\pi$$

Boyalı bölgenin çevre uzunluğunu Ç ile gösterelim.

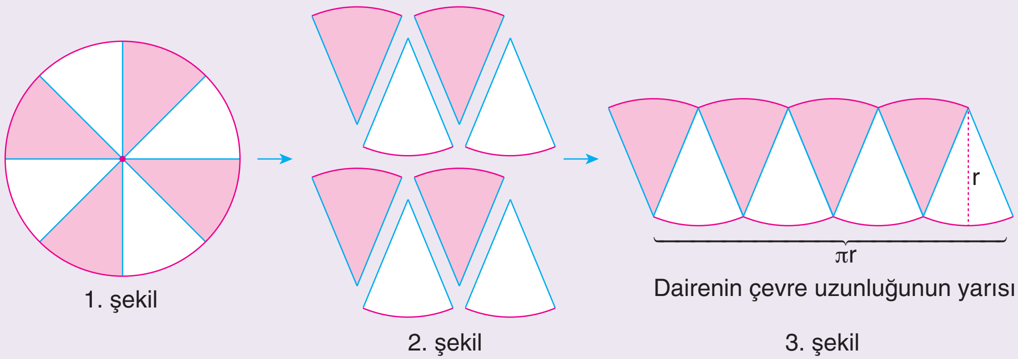
$$Ç = |AO| + |OB| + |\overset{\frown}{AB}|$$
$$= 12 + 12 + 10\pi$$
$$= 24 + 10\pi$$
$$= 2(12 + 5\pi)$$

O hâlde boyalı bölgenin çevresi $2(12 + 5\pi)$ birimdir.

Dairenin Alanı

ETKİNLİK

- Kartondan yarıçap uzunluğu r birim olan bir daire keselim.
- Daireyi katlama izi çemberin bir çapını oluşturacak şekilde ikiye, sonra tekrar kendi üzerine katlayarak dörde ve tekrar katlayarak sekiz eş dilime ayıralım ve dördünü boyayalım (1. şekil).
- Üçgene benzeyen 8 parçayı keselim (2. şekil).
- Boyalı parçaların sivri uçları aşağıda, beyaz parçaların sivri uçları yukarıda olacak biçimde tüm parçaları şekildeki gibi yan yana yerleştirelim (3. şekil).



1. şekil 2. şekil 3. şekil

★ Bu düzlem parçasını çevreleyen çokgeni paralelkenar olarak düşünelim. Oluşan paralelkenarın yüksekliği kaç birimdir?

★ Oluşan paralelkenarın taban uzunluğu ile dairenin çevre uzunluğu arasında nasıl bir ilişki vardır?

★ "Paralelkenarın alanı = taban uzunluğu · yükseklik" bağıntısını kullanarak paralelkenarın alanını hesaplayınız.

★ Bulduğunuz alan aynı zamanda r yarıçaplı dairenin alanı mıdır? Açıklayınız.

BİLGİ

Yarıçap uzunluğu r birim olan bir dairenin alanı πr^2 birimkaredir.

ÖRNEK

Yarıçap uzunluğu 5 birim olan dairenin alanı kaç birimkaredir? Bulalım.

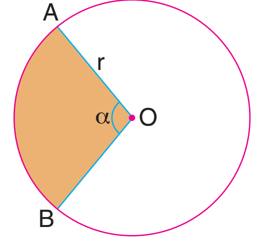
Çözüm

Yarıçap uzunluğu 5 birim olan dairenin alanı S olsun.

$$S = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$$

Dairenin alanı 25π birimkaredir.

Daire Diliminin Alanı



Bir çember yayı ile yayın uç noktalarını merkeze birleştiren iki yarıçapın sınırladığı bölgeye daire dilimi denir. Şekilde boyalı bölge bir daire dilimidir.

Şekildeki r yarıçaplı çemberde merkez açısının ölçüsü α derece olan daire diliminin alanını orantı yardımıyla hesaplayalım.

360 derecelik açıya — πr^2 alan karşılık gelirse

α derecelik açıya — x alan karşılık gelir.

Doğru orantı

$$x = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi r^2$$

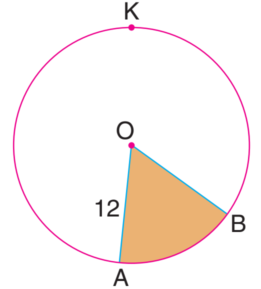
BİLGİ

Yarıçapı r olan bir çemberde merkez açısının ölçüsü α derece olan bir daire diliminin alanı S olmak üzere aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$S = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi r^2$$



ÖRNEK



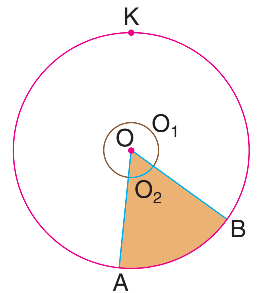
Yandaki şekilde O noktası çemberin merkezidir.

$m(\widehat{BKA}) = 300°$

$r = 12$ birim

olduğuna göre boyalı daire diliminin alanı kaç birimkaredir? Bulalım.

Çözüm



Yandaki şekilde BKA yayını gören O_1 merkez açısının da ölçüsü 300° dir.

$m(\widehat{O_2}) = 360° - m(\widehat{O_1})$

$m(\widehat{O_2}) = 360° - 300°$

$= 60°$

Bu bilgiyi daire diliminin alanını veren bağıntıda yerine yazalım ve gerekli işlemleri yapalım.

$$S = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi \cdot r^2$$

$$= \frac{60}{360} \cdot \pi \cdot 12^2$$

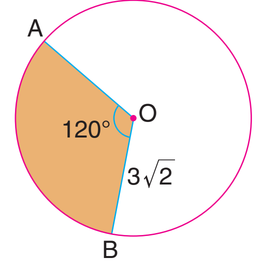
$$= \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 12 \cdot 12$$

$$= \pi \cdot 2 \cdot 12$$

$$= 24\pi$$

O hâlde boyalı daire diliminin alanı 24π birimkaredir.

ÖRNEK



Yandaki şekilde O noktası çemberin merkezidir.

$r = 3\sqrt{2}$ birim

$m(\widehat{AOB}) = 120°$

olduğuna göre boyalı daire diliminin alanını bulalım.

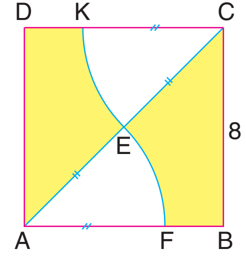
Çözüm

O merkezli dairenin alanı, $\pi(3\sqrt{2})^2 = 18\pi$ birimkaredir.

1° lik daire diliminin alanı, $\frac{18\pi}{360} = \frac{\pi}{20}$ birimkaredir.

120° lik daire diliminin alanı $120 \cdot \frac{\pi}{20} = 6\pi$ birimkaredir.

ÖRNEK



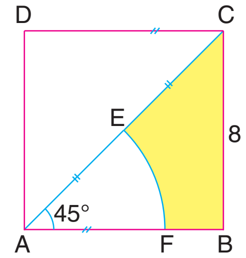
1. şekil

Yandaki şekilde ABCD bir karedir. EF yayı, A merkezli r birim yarıçaplı çember yayı ve KE yayı, C merkezli r birim yarıçaplı çember yayıdır (1. şekil).

$|BC| = 8$ birim olduğuna göre boyalı bölgelerin alanları toplamı kaç birimkaredir? Bulalım.

Çözüm

2. şekildeki boyalı bölgenin alanını bulup 2 ile çarparsak 1. şekildeki toplam alanı buluruz.



2. şekil

$|AE| = |EC|$ uzunluklarını bulalım. Karenin bir kenarının uzunluğu 8 birim olduğundan $[AC]$ köşegeninin uzunluğu $8\sqrt{2}$ birimdir. $|AE|$, köşegenin uzunluğunun yarısına eşit olduğundan

$$|AE| = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \text{ birim olur.}$$

Daire diliminin alanı $= \frac{\alpha}{360} \cdot \pi \cdot |AE|^2$

$= \frac{45}{360} \cdot \pi \cdot 32$

$= 4\pi$

Boyalı bölgenin alanı $= \frac{\text{Karenin alanı}}{2} - \text{Daire diliminin alanı}$

$= \frac{64}{2} - 4\pi$

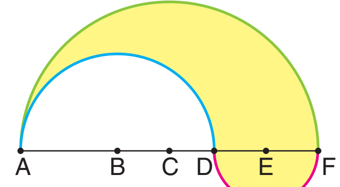
$= 32 - 4\pi$

$= 4(8 - \pi)$

Boyalı bölgelerin toplam alanı $4(8 - \pi)$ nin 2 katı olduğundan $8(8 - \pi)$ birimkaredir.

ÖRNEK

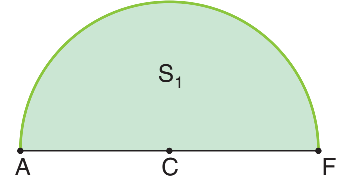
Yandaki şekilde C merkezli (yeşil), B merkezli (mavi) ve E merkezli (kırmızı) yarım çemberler verilmiştir (1. şekil). Bu çemberlerin yarıçap uzunlukları sırasıyla 6 birim, 4 birim ve 2 birimdir. Buna göre sarı bölgenin alanını bulalım.



1. şekil

Çözüm

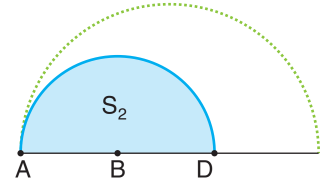
Yarıçap uzunluğu 6 birim olan C merkezli yeşil yarım dairenin alanını bulalım (2. şekil).



2. şekil

$$S_1 = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 6^2}{2} = \frac{36\pi}{2} = 18\pi$$

Yarıçap uzunluğu 4 birim olan B merkezli mavi yarım dairenin alanını bulalım (3. şekil).



3. şekil

$$S_2 = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 4^2}{2} = \frac{16\pi}{2} = 8\pi$$

Yarıçap uzunluğu 2 birim olan E merkezli kırmızı yarım dairenin alanını bulalım (4. şekil).



4. şekil

$$S_3 = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$$

Aradığımız sarı bölgenin alanı sembolik olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

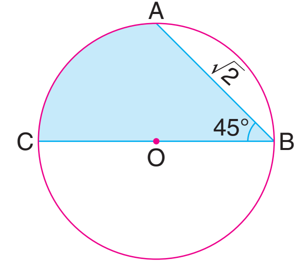
$$\text{Sarı bölgenin alanı} = S_1 + S_3 - S_2$$

Bulduğumuz değerleri yerlerine yazalım, sarı bölgenin alanını bulalım.

$$\text{Sarı bölgenin alanı} = 18\pi + 2\pi - 8\pi = 20\pi - 8\pi = 12\pi$$

O hâlde sarı bölgenin alanı 12π birimkaredir.

ÖRNEK



1. şekil

Yandaki şekilde O noktası çemberin merkezidir (1. şekil).

$m(\widehat{CBA}) = 45°$

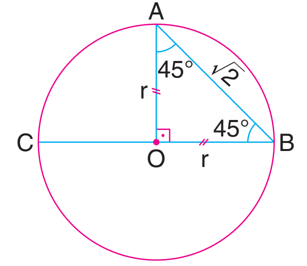
$|BA| = \sqrt{2}$ birim

olduğuna göre mavi bölgenin alanını bulalım.

Çözüm

$[AO]$ doğru parçasını çizelim. $|AO| = |OB| = r$ olduğundan AOB üçgeni ikizkenardır. İkizkenar üçgende taban açılarının ölçüsü eşit olacağından,

$$m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = 45° \text{ dir (2. şekil).}$$



2. şekil

Buna göre AOB açısının ölçüsü 90° olur. AOB dik üçgeninde Pisagor bağıntısını yazalım ve bilinen değerler yardımıyla çemberin r yarıçap uzunluğunu bulalım.

$$|AO|^2 + |OB|^2 = |BA|^2$$

$$r^2 + r^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$2r^2 = 2$$

$$r^2 = 1$$

$$r = 1$$

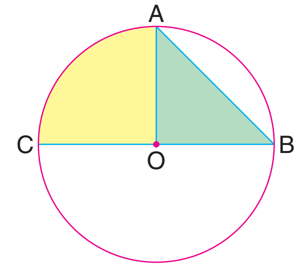
Şimdi de AOB dik üçgeninin alanını hesaplayalım.

$$A(AOB) = \frac{r \cdot r}{2}$$

$$= \frac{1 \cdot 1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

3. şekildeki sarı daire diliminin alanı, dairenin alanının dörtte birine eşittir. Buna göre aşağıdaki eşitlikleri yazabilir, gerekli işlemleri yapabiliriz.



3. şekil

$$\text{Dairenin alanı } = \pi r^2 = \pi \cdot 1 = \pi$$

$$\text{Daire diliminin alanı } = \frac{\pi}{4}$$

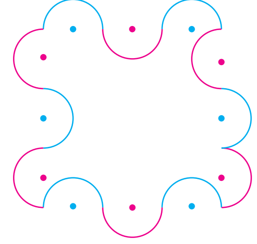
$$\text{AOB üçgeninin alanı } = \frac{1}{2}$$

$$\text{İstenen alan } = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

O hâlde mavi bölgenin alanı $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ birimkaredir.

ALIŞTIRMALAR

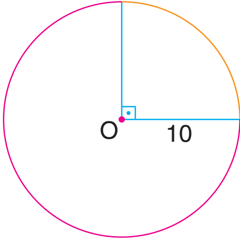
1. 6,28 metre uzunluğundaki bir tel, çember biçiminde kıvrılacaktır. Elde edilecek çemberin yarıçap uzunluğunu bulunuz ($\pi = 3,14$ alınız.).



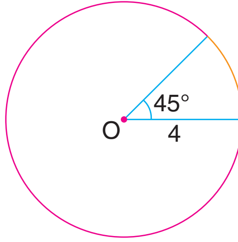
2. Yandaki şekil eş 12 yarım çemberden oluşmuştur. Şeklin çevre uzunluğu 28,26 cm olduğuna göre bu çemberlerin yarıçaplarının uzunluğunu bulunuz ($\pi = 3,14$ alınız.).

3. Aşağıda turuncu renkte çizilen yayların uzunluğunu hesaplayınız (O, çemberlerin merkezidir.).

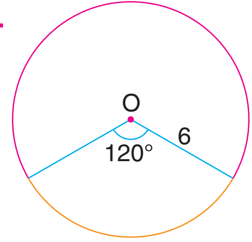
a.



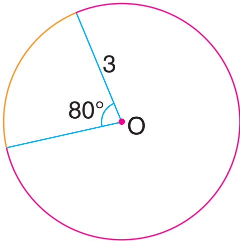
b.



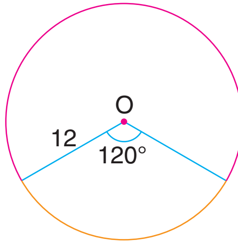
c.



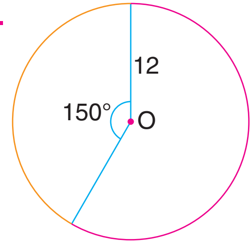
ç.



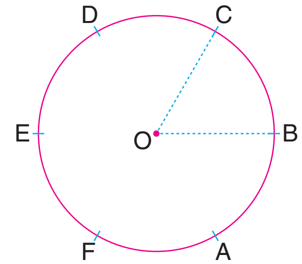
d.



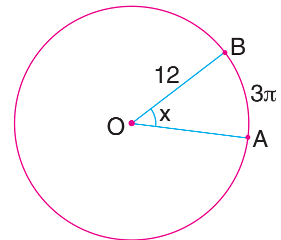
e.



4. Yandaki O merkezli çemberde A, B, C, D, E ve F noktaları çemberi 6 eş parçaya ayırmıştır. Buna göre $\widehat{COB}$ açısının ölçüsünü bulunuz.



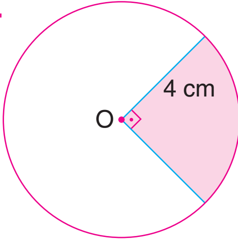
5. Yandaki O merkezli çemberde AB yayının uzunluğu 3π birim ve çemberin yarıçap uzunluğu 12 birimdir. Buna göre AOB açısının ölçüsünü bulunuz.



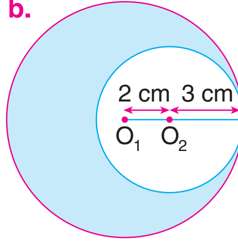
6. Yarıçapının uzunluğu r birim olan bir dairenin alanı a birimkare, çevresi ise b birimdir. Buna göre r'yi a ve b türünden yazınız.

7. Aşağıda verilen boyalı bölgelerin alanlarını bulunuz (O, O_1 ve O_2 noktaları çemberlerin merkezidir.).

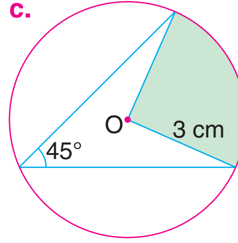
a.



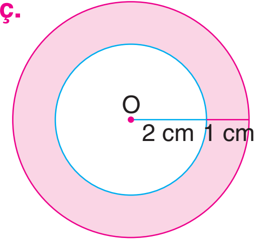
b.



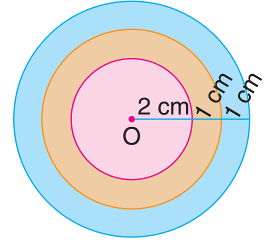
c.



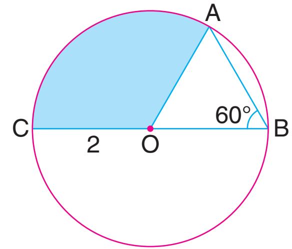
ç.



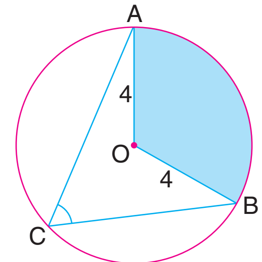
8. Şekildeki çemberlerin merkezi O noktasıdır. Buna göre farklı renkte boyanmış olan bölgelerden hangisinin alanı en büyüktür?



9. Yandaki O merkezli çemberde, $|OC| = 2$ birim, $m(\widehat{CBA}) = 60°$ olduğuna göre boyalı bölgenin alanını bulunuz.



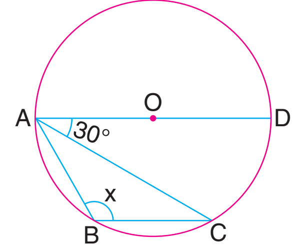
10. Şekildeki O merkezli çemberin yarıçapı 4 birimdir. Boyalı daire diliminin alanı $\frac{16}{3}\pi$ birimkare olduğuna göre BCA açısının ölçüsünü bulunuz.



4. ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

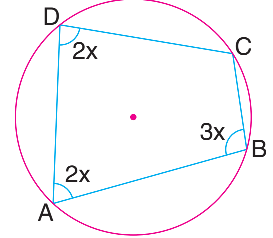
1. Şekildeki O noktası çemberin merkezidir. $m(\widehat{DAC}) = 30°$ olduğuna göre $m(\widehat{ABC}) = x$ kaç derecedir?

A) 100 B) 105 C) 110 D) 120 E) 150



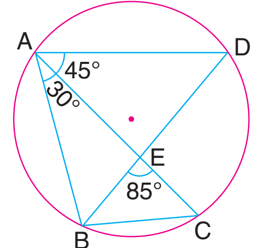
2. Yandaki şekilde verilenlere göre DCB açısının ölçüsü kaç derecedir?

A) 90 B) 108 C) 120 D) 124 E) 136



3. Yandaki şekilde $m(\widehat{CAB}) = 30°$, $m(\widehat{CEB}) = 85°$ ve $m(\widehat{DAC}) = 45°$ olduğuna göre ABC açısının ölçüsü kaç derecedir?

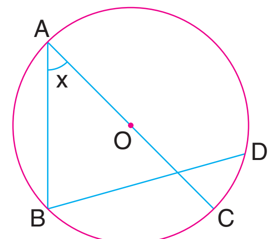
A) 85 B) 90 C) 95 D) 100 E) 105



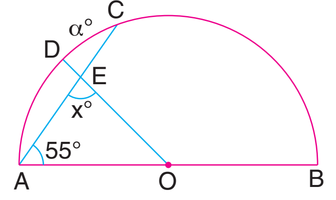
4. Yandaki şekilde çemberin merkezi O noktasıdır.

$6m(\overset{\frown}{CD}) = 2m(\overset{\frown}{DA}) = 3m(\overset{\frown}{AB})$ olduğuna göre $m(\widehat{CAB}) = x$ kaç derecedir?

A) 30 B) 40 C) 45 D) 55 E) 60



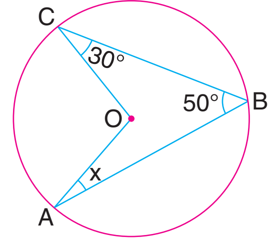
5. Yandaki O merkezli [AB] çaplı yarım çemberde $m(\overset{\frown}{CD}) = \alpha°$, $m(\widehat{CAO}) = 55°$ ve $m(\widehat{OEA}) = x°$ olduğuna göre x'in α türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?



A) α B) 2α C) $\alpha - \dfrac{55}{2}$

D) $\alpha + 55$ E) $2\alpha - 55$

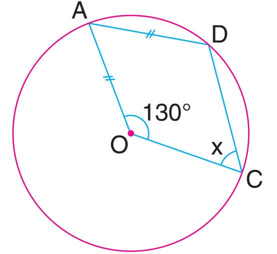
6. Şekildeki çemberin merkezi O noktasıdır. $m(\widehat{ABC}) = 50°$ ve $m(\widehat{BCO}) = 30°$ olduğuna göre $m(\widehat{OAB}) = x$ kaç derecedir?



A) 10 B) 15 C) 18

D) 20 E) 25

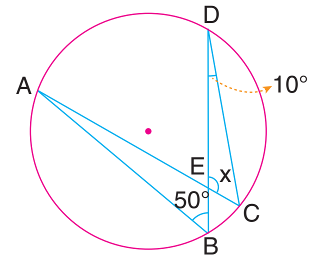
7. O merkezli çemberde $m(\widehat{AOC}) = 130°$ ve $|DA| = |AO|$ olduğuna göre $m(\widehat{OCD}) = x$ kaç derecedir?



A) 50 B) 55 C) 60

D) 65 E) 70

8. Yandaki çemberde $m(\widehat{ABD}) = 50°$ ve $m(\widehat{CDB}) = 10°$ olduğuna göre $m(\widehat{CED}) = x$ kaç derecedir?



A) 105 B) 110 C) 115

D) 120 E) 125

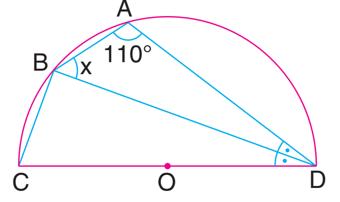
9. Yandaki O merkezli [CD] çaplı yarım çemberde

$m(\widehat{CDB}) = m(\widehat{BDA})$ ve $m(\widehat{DAB}) = 110°$ olduğuna göre

$m(\widehat{ABD}) = x$ kaç derecedir?

A) 45 B) 50 C) 55

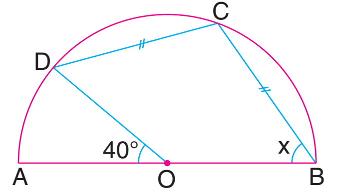
D) 60 E) 65



10. Yandaki O merkezli [AB] çaplı yarım çemberde $m(\widehat{AOD}) = 40°$ ve $|BC| = |CD|$ olduğuna göre $m(\widehat{OBC}) = x$ kaç derecedir?

A) 40 B) 45 C) 50

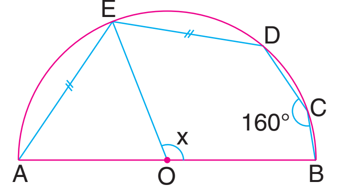
D) 55 E) 60



11. Yandaki O merkezli [AB] çaplı yarım çemberde $m(\widehat{BCD}) = 160°$ ve $|DE| = |EA|$ olduğuna göre $m(\widehat{EOB}) = x$ kaç derecedir?

A) 100 B) 105 C) 110

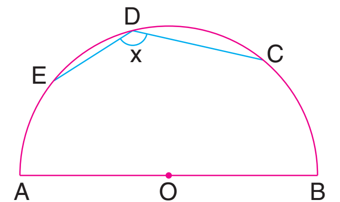
D) 115 E) 120



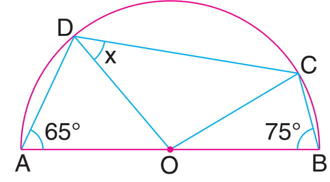
12. Yandaki [AB] çaplı yarım çemberde $m(\overset{\frown}{BC}) = m(\overset{\frown}{CD})$ ve $m(\overset{\frown}{DE}) = m(\overset{\frown}{EA})$ olduğuna göre $m(\widehat{CDE}) = x$ kaç derecedir?

A) 135 B) 140 C) 145

D) 150 E) 155



13. Yandaki O merkezli $[AB]$ çaplı yarım çemberde $m(\widehat{DAO}) = 65°$ ve $m(\widehat{OBC}) = 75°$ olduğuna göre $m(\widehat{CDO}) = x$ kaç derecedir?



A) 35
B) 40
C) 45
D) 50
E) 55

14. Çevresi 12π birim olan dairenin alanı kaç birimkaredir?

A) 18π
B) 24π
C) 30π
D) 36π
E) 42π

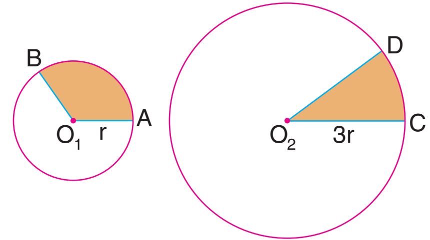
15. Yarıçapı 8 birim olan bir çemberde 4π uzunluğundaki bir yayı gören daire diliminin alanı kaç birimkaredir?

A) 9π
B) 12π
C) 15π
D) 16π
E) 18π

16. Yarıçapı 5 birim olan bir daire diliminin alanı 15π birimkaredir. Bu daire dilimine karşılık gelen yayın uzunluğu kaç birimdir?

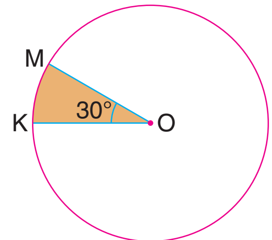
A) 6π
B) 8π
C) 9π
D) 12π
E) 15π

17. Yanda O_1 merkezli r yarıçaplı ve O_2 merkezli 3r yarıçaplı iki çember verilmiştir. Çemberler üzerindeki AB ve CD yaylarının uzunlukları eşittir. Buna göre AB yayına karşılık gelen daire diliminin alanının CD yayına karşılık gelen daire diliminin alanına oranı kaçtır?



A) $\frac{1}{2}$
B) $\frac{1}{3}$
C) $\frac{1}{6}$
D) $\frac{1}{9}$
E) 1

18. Şekildeki merkez açısının ölçüsü 30° olan boyalı daire diliminin alanı $\frac{4}{3}\pi$ birimkare olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğu kaç birimdir?

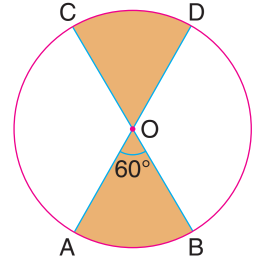


A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 8

19. Şekildeki O merkezli çemberde $m(\widehat{BOA}) = 60°$ dir. $|\widehat{AB}| = \pi$ birim olduğuna göre boyalı bölgelerin alanlarının toplamı kaç birimkaredir?

A) π B) 2π C) 3π

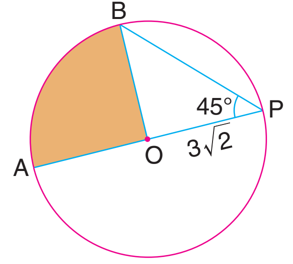
D) 4π E) 5π



20. Şekilde verilen O merkezli çemberin yarıçap uzunluğu $3\sqrt{2}$ birim, $m(\widehat{APB}) = 45°$ olduğuna göre boyalı daire diliminin alanı kaç birimkaredir?

A) 4π B) 5π C) $\frac{7\pi}{2}$

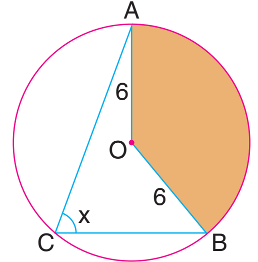
D) $\frac{9\pi}{2}$ E) $\frac{11\pi}{2}$



21. Şekildeki O merkezli çemberin yarıçap uzunluğu 6 birimdir. Boyalı daire diliminin alanı 15π birimkare olduğuna göre $m(\widehat{BCA}) = x$ kaç derecedir?

A) 40 B) 45 C) 50

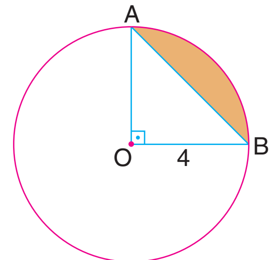
D) 60 E) 75



22. Şekildeki O merkezli çemberin yarıçap uzunluğu 4 birimdir.
$[AO] \perp [OB]$ olduğuna göre boyalı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

A) $4\pi - 8$ B) $4\pi - 6$ C) $4\pi - 4$

D) $4\pi - 3$ E) $2\pi - 2$



ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARININ YANITLARI

1. ÜNİTE

1.	D	11.	A	21.	A
2.	D	12.	D	22.	E
3.	A	13.	A	23.	D
4.	D	14.	C	24.	D
5.	D	15.	E	25.	A
6.	A	16.	C	26.	B
7.	E	17.	A	27.	B
8.	D	18.	D	28.	D
9.	C	19.	E	29.	B
10.	C	20.	A		

2. ÜNİTE

1.	D	11.	A	21.	B
2.	D	12.	A	22.	A
3.	A	13.	E	23.	E
4.	C	14.	A	24.	E
5.	D	15.	C	25.	B
6.	E	16.	E		
7.	C	17.	E		
8.	A	18.	C		
9.	D	19.	C		
10.	B	20.	C		

3. ÜNİTE

1.	B	11.	D	21.	A
2.	E	12.	C	22.	B
3.	B	13.	C	23.	E
4.	D	14.	D	24.	B
5.	A	15.	C	25.	C
6.	E	16.	B	26.	E
7.	A	17.	A	27.	C
8.	D	18.	E	28.	D
9.	E	19.	D	29.	C
10.	C	20.	D	30.	A

4. ÜNİTE

1.	D	11.	C	21.	E
2.	B	12.	A	22.	A
3.	D	13.	B		
4.	C	14.	D		
5.	D	15.	D		
6.	D	16.	A		
7.	B	17.	B		
8.	D	18.	B		
9.	B	19.	C		
10.	D	20.	D		

SÖZLÜK

A

açı : Başlangıç noktaları aynı olan iki ışının birleşim kümesi.

alan : Bir yüzeyin bulunduğu düzlemde kapladığı yer. Bir yüzeyi kaplamak için gerekli birim karelerin sayısı.

alt küme : Bir kümenin elemanlarından bazılarının oluşturduğu küme.

analitik düzlem : Üzerine koordinat sistemi yerleştirilmiş düzlem.

aralarında asal sayılar : Ortak bölenlerinin en büyüğü 1 olan en az iki tam sayı.

aritmetik ortalama : Bir veri grubundaki sayıların toplamının, veri sayısına bölünmesi ile elde edilen değer.

asal sayı : 1 ve kendisinden başka böleni olmayan, 1 den büyük tam sayı.

ayrıt : Bir cismin iki yüzünün ara kesiti.

B

basamak : Bir sayının rakamlarının bulunduğu yer.

başlangıç noktası : Koordinat eksenlerinin kesiştiği nokta. Orijin.

bilinmeyen : Bir eşitliği sağlayan sayılara karşılık gelen sembol ya da harf.

birim : Bir niceliği ölçmek için kendi cinsinden örnek seçilen değişmez parça.

boş küme : Elemanı olmayan küme.

bölen : Bir bölme işleminde bölünen sayının kaç eşit parçaya ayrıldığını gösteren sayı.

bölüm : Bölme işlemi sonunda elde edilen sayı.

bölünen : Bölme işleminde eşit parçalara ayrılması gereken sayı, miktar.

bütçe : Devletin, bir kuruluşun, bir aile veya bir kimsenin gelecekteki belirli bir süre için tasarladığı gelir ve giderlerinin tümü.

bütçe açığı : Bütçede belirlenen giderlerin gelirlerden çok olması durumu.

bütçe dengesi : Bütçede gelirin gidere eşit olma durumu.

Ç

çap : Çemberin merkezinden geçen ve uç noktaları çember üzerinde bulunan doğru parçası.

çember : Bir düzlemdeki sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesi.

çevre açı : Köşesi çemberin üzerinde olan ve ışınları çemberden yay ayıran açı.

çözümleme : Bir rasyonel sayıyı 10 un kuvvetleri türünden yazma.

D

daire : Çember ile iç bölgesinin birleşimi.

daire dilimi : Bir dairede, merkez açının iç bölgesinin gördüğü yayla sınırlı olan kısmı.

dar açı : Ölçüsü 90 dereceden küçük olan açı.

denklem : Bilinmeyeni içeren eşitlik.

denklemin kökü : Denklemi sağlayan değer.

derece : Birim çemberin çevre uzunluğunu 360 eş parçaya ayırarak her bir parçayı gören merkez açının ölçüsü.

dik açı : Ölçüsü 90 derece olan açı.

dik kenar : Bir dik üçgende her bir dar açının karşısında bulunan kenar.

dik üçgen : Bir açısının ölçüsü 90 derece olan üçgen.

doğru orantı : Biri artarken diğeri de aynı oranda artan ya da biri azalırken diğeri de aynı oranda azalan çokluklar arasındaki orantı çeşidi.

doğrusal noktalar : Aynı doğru üzerinde bulunan noktalar.

E

eğim : Düz bir çizginin düşey ve yatay eksenlerdeki değerleri arasındaki oran.

eşitlik : İçinde “=” sembolü bulunan matematik cümlesi.

eşitsizlik : İçinde $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ veya $\neq$ sembollerinden en az birinin bulunduğu matematik cümlesi.

G

gerçek sayılar : Doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar ve irrasyonel sayılar kümesinin hepsini kapsayan ve $\mathbb{R}$ ile gösterilen sayı kümesi.

H

hipotenüs : Bir dik üçgende en uzun kenar.

I

ışın : Bir doğrunun belirli bir yerinden başlayıp düz olarak sürekli tek yöne uzatılabilen, uzunluğu sınırsız kalınlığı bulunmayan geometrik terim.

İ

irrasyonel sayı : Rasyonel sayı olarak ifade edilemeyen sayı.

K

kesen : Paralel iki doğrunun her birini farklı bir noktada kesen üçüncü doğru. Bir çemberi iki noktada kesen doğru.

kiriş : Çember üzerindeki iki farklı noktayı birleştiren doğru parçası.

küme : İyi tanımlanmış birbirinden farklı nesnelerden oluşan topluluk.

kümenin elemanları : Bir kümeyi oluşturan nesneler.

M

merkez açı : Köşesi çemberin merkezinde olan ve ışınları çemberde yay ayıran açı.

O

oran : İki çokluğun (niceliğin) bölme şeklinde birbiri ile karşılaştırılması: $a : b$, $\frac{a}{b}$

orantı : İki ya da daha fazla oranın eşitliği.

Ö

ölçek : Bir harita veya resimde görülen uzaklıklarla bunların işaret ettiği, karşılandığı gerçek uzunluklar arasındaki oran.

R

rasyonel sayı : $a, b \in \mathbb{Z}$ $(b \neq 0)$ olmak üzere, $\frac{a}{b}$ şeklinde bir kesir olarak ifade edilebilen sayı.

S

sabit : Değişmeden kalan değer.

sayı doğrusu : Üzerine reel sayıların yerleştirildiği doğru.

sıralı ikili : A kümesinden alınan bir a elemanı ile B kümesinden alınan bir b elemanı kullanılarak oluşturulan (a, b) şeklindeki yeni eleman.

sonlu küme : Eleman sayısı bir doğal sayıya eşit olan küme.

sonsuz küme : Sonlu olmayan küme.

soyutlama : Bir nesnenin özelliklerden veya özellikleri arasındaki ilişkilerden herhangi birini tek başına ele alan zihinsel işlem, gerçeklikte ayrılamaz olanı düşüncede ayırma.

T

tasarruf : Elde edilen gelirin ihtiyaç ve harcamalar için kullanılmayan kısmı.

teğet : Bir eğrinin yanından geçen ve ona ancak bir noktada değen doğru.

terim : Cebirsel bir ifadede $+$ veya $-$ işaretleri arasında bulunan parçalardan her biri.

ters orantı : Biri artarken diğeri aynı oranda azalan ya da biri azalırken diğeri aynı oranda artan çokluklar arasındaki orantı çeşidi.

Ü

üs : Bir sayının kaç tanesinin çarpıldığını gösteren ve bu sayının sağ üst köşesine yazılan sayı (kuvvet).

Y

yüzde : Herhangi bir sayı ile kullanıldığında yüze bölünen bir şeyin o kadarlık parçasını belirten bir söz.

MATEMATİK SEMBOLLERİ VE ANLAMLARI

Matematiksel Semboller		Matematiksel Sembollerin Anlamları
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	:	Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^-$	:	Negatif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	:	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}^+$	:	Pozitif rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}^-$	:	Negatif rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}'$	:	İrrasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Gerçek (gerçel, reel) sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	:	Pozitif gerçek sayılar kümesi
$\mathbb{R}^-$	:	Negatif gerçek sayılar kümesi
$\cup$	:	Birleşim
$\cap$	:	Kesişim
$\subset$	:	Alt küme
$\varnothing$	:	Boş küme
$\Rightarrow$	:	ise
$\in$	:	Elemanıdır
$>$	:	Büyük
$\geq$	:	Büyük veya eşit
$<$	:	Küçük
$\leq$	:	Küçük veya eşit
$^\circ$	:	Derece
$\neq$	:	Eşit değil

Matematiksel Semboller		Matematiksel Sembollerin Anlamları
$\overset{\frown}{ABC}$	:	ABC yayı
$m(\overset{\frown}{ABC})$	:	ABC yayının ölçüsü
$\widehat{ABC}$	:	ABC açısı
$m(\widehat{ABC})$	:	ABC açısının ölçüsü
$[AB]$	:	Uç noktaları A ve B olan AB doğru parçası
$\|AB\|$	:	AB doğru parçasının uzunluğu
$\overset{\triangle}{ABC}$	:	ABC üçgeni
$A(\overset{\triangle}{ABC})$	:	ABC üçgeninin alanı
AA	:	Açı açı benzerlik kuralı
KAK	:	Kenar açı kenar benzerlik kuralı
KKK	:	Kenar kenar kenar benzerlik kuralı
$\sim$	:	Benzer
$\perp$	:	Dik
//	:	Paralel
br	:	Birim
%	:	Yüzde
∞	:	Sonsuz
°C	:	Derece selsiyus
$\approx$	:	Yaklaşık değer
π	:	Pi sayısı

KAYNAKÇA

Bilim ve Teknik Dergisi. Ankara: TÜBİTAK, Ağustos 2004.

Demirtaş, Abdurrahman. *Ansiklopedik Matematik Sözlüğü*. Ankara: Bilim Teknik Kültür, 1986.

Gözen, Şükran. *Matematik ve Öğretimi*. İstanbul: Evrim, 2001.

Gardner, Martin. *Hah, Buldum!*. Çev. Barış Bıçakçı. Ankara: TÜBİTAK, 2011.

Halıcı, Emrehan. *Zekâ Oyunları*. Ankara: TÜBİTAK, 2004.

Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. *Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) Öğretim Programı*. Ankara: MEB, 2018.

Durmaz, Gülay. "Pergelin Bir Ayağı Şair, Diğer Ayağı Hayal Dünyası: Divan Şiirinde Pergel". *International Periodical For the Languages, Literature and History of Turkish or Turkic*. 8/9 (2013): 1251-1270.

Türkçe Sözlük. Ankara: Türk Dil Kurumu, 2011.

Yazım Kılavuzu. Ankara: Türk Dil Kurumu, 2012.

İNTERNET KAYNAKLARI

Web sayfalarına erişim tarihleri parantez içinde verilmiştir.

http://www.birecik.gov.tr/kelaynak-kuslari (12.12.2017)

http://sgm.gsb.gov.tr/Sayfalar/127/163/OlimpiyatSembolleri (05.01.2018)

https://www.geogebra.org/m/hQntdrZH (16.02.2018)

https://www.muze.gov.tr/tr/muzeler/tarihi-sinop-cezaevi (19.06.2018)

GÖRSEL KAYNAKÇA

Kitapta yer alan fotoğraflar www.shutterstock.com internet adresinden ücret karşılığı satın alınmıştır. Diğer görseller yayınevi arşivinden kullanılmıştır.